BULLETIN *of the*
MALAYSIAN
MATHEMATICAL
SCIENCES
SOCIETY

Bull. Malaysian Math. Sc. Soc. (Second Series) **25** (2002) 157-162

Persembahan-3 Hasil Darab Langsung dengan Permasalahan Gambarnya Boleh Ditentukan

ABD. GHAFUR BIN AHMAD
Pusat Pengajian Sains Matematik, Fakulti Sains dan Teknologi, Universiti Kebangsaan Malaysia,
UKM 43600 Bangi, Selangor Darul Ehsan, Malaysia

Abstrak. Kertas ini mengklasifikasikan bentuk-bentuk persembahan-3 hasil darab langsung yang permasalahan gambarnya boleh ditentukan.

1. Pengenalan

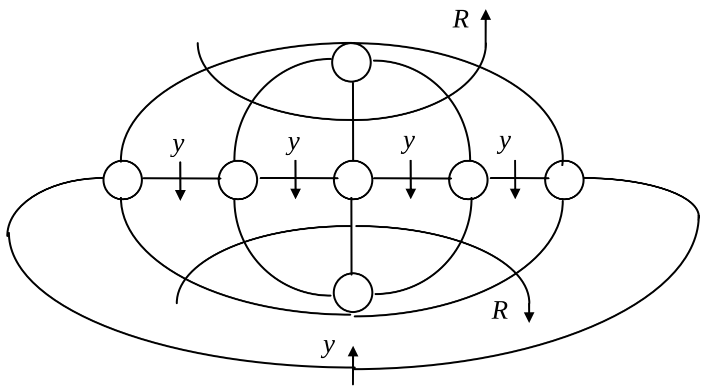
Persembahan-3 adalah tiga pasangan $\langle \boldsymbol{x}; \boldsymbol{r}; \boldsymbol{P} \rangle$ dengan $\langle \boldsymbol{x}; \boldsymbol{r} \rangle$ adalah sebarang persembahan kumpulan dan $\boldsymbol{P}$ adalah sebarang set *gambar sfera* dalam $\langle \boldsymbol{x}; \boldsymbol{r} \rangle$. Gambar sfera merupakan suatu konfigurasi geometri dan boleh dirujuk misalnya dalam [5]. Adalah dimaklumkan bahawa persembahan-3 juga boleh dianggapkan sebagai *perluasan persembahan kumpulan* seperti yang ditakrifkan oleh Fenn [3].

Andaikan $\langle \boldsymbol{x}; \boldsymbol{r} \rangle$ dan $\langle \boldsymbol{y}; \boldsymbol{s} \rangle$ sebarang persembahan kumpulan. Maka persembahan kumpulan hasil darab langsung ialah persembahan $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}; \boldsymbol{r}, \boldsymbol{s}, [x, y]\ (x \in \boldsymbol{x}, y \in \boldsymbol{y}) \rangle$ dengan $[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$ merupakan penukar tertib. Jadi *persembahan-3 hasil darab langsung* adalah persembahan $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}; \boldsymbol{r}, \boldsymbol{s}, [x, y]\ (x \in \boldsymbol{x}, y \in \boldsymbol{y}); \boldsymbol{P} \rangle$ dengan $\boldsymbol{P}$ adalah sebarang set *gambar sfera* dalam $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}; \boldsymbol{r}, \boldsymbol{s}, [x, y]\ (x \in \boldsymbol{x}, y \in \boldsymbol{y}) \rangle$. Persembahan-3 hasil darab langsung ini merupakan kompleks Squier [6] seperti yang terdapat dalam [4].

Permasalahan gambar bagi persembahan-3 $\langle \boldsymbol{x}; \boldsymbol{r}; \boldsymbol{P} \rangle$ merupakan suatu persoalan untuk mencari suatu alkhawarizma bagi menentukan sebarang gambar sfera □ dalam $\langle \boldsymbol{x}; \boldsymbol{r} \rangle$ sama ada □ setara (modulo $\boldsymbol{P}$) dengan gambar hampa. Rujuk [1]. Permasalahan yang hampir serupa melibatkan kumpulan gambar rajah boleh dirujuk dalam [4].

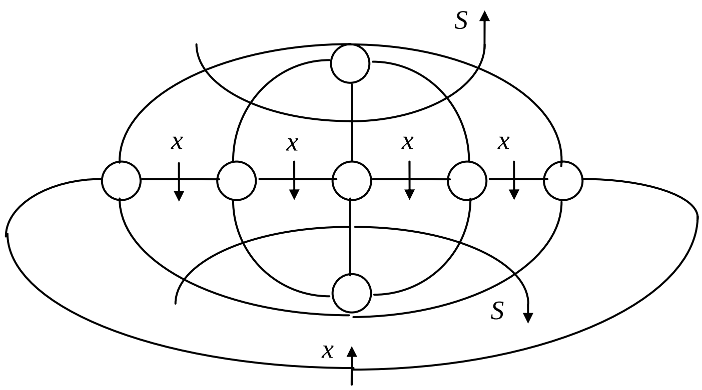
2. Bentuk-bentuk persembahan-3 hasil darab langsung

Persembahan-3 hasil darab langsung yang ditakrifkan di atas boleh diklasifikasikan kepada beberapa bentuk berdasarkan kepada pemilihan set gambar $\boldsymbol{P}$. Andaikan $\boldsymbol{P_x}$ dan $\boldsymbol{P_y}$ masing-masing set gambar sfera dalam $\langle \boldsymbol{x}; \boldsymbol{r}\rangle$ dan $\langle \boldsymbol{y}; \boldsymbol{s}\rangle$ yang menjana kumpulan homotopi modul kedua $\pi_2(\langle \boldsymbol{x}; \boldsymbol{r}\rangle)$ dan $\pi_2(\langle \boldsymbol{y}; \boldsymbol{s}\rangle)$. Rujuk misalnya [2] atau [5]. Juga andaikan $\boldsymbol{P_r}$ set gambar sfera dalam $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}; \boldsymbol{r}, \boldsymbol{s}, [x, y]\ (x \in \boldsymbol{x}, y \in \boldsymbol{y})\rangle$ yang berbentuk



dengan y unsur dalam $\boldsymbol{y}$ dan R unsur dalam $\boldsymbol{r}$.

Juga andaikan $\boldsymbol{P_s}$ set gambar sfera dalam $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}; \boldsymbol{r}, \boldsymbol{s}, [x, y]\ (x \in \boldsymbol{x}, y \in \boldsymbol{y})\rangle$ yang berbentuk



dengan x unsur dalam $\boldsymbol{x}$ dan S unsur dalam $\boldsymbol{s}$.

Persembahan-3 hasil darab langsung adalah *prinsipal* jika ia berbentuk salah satu daripada yang berikut:

1. $\left\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}; \boldsymbol{r}, \boldsymbol{s}, [x, y]\ (x \in \boldsymbol{x}, y \in \boldsymbol{y});\ \varnothing \right\rangle$
2. $\left\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}; \boldsymbol{r}, \boldsymbol{s}, [x, y]\ (x \in \boldsymbol{x}, y \in \boldsymbol{y});\ \boldsymbol{P_x} \right\rangle$ atau $\left\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}; \boldsymbol{r}, \boldsymbol{s}, [x, y]\ (x \in \boldsymbol{x}, y \in \boldsymbol{y});\ \boldsymbol{P_y} \right\rangle$
3. $\left\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}; \boldsymbol{r}, \boldsymbol{s}, [x, y]\ (x \in \boldsymbol{x}, y \in \boldsymbol{y});\ \boldsymbol{P_x}, \boldsymbol{P_y} \right\rangle$
4. $\left\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}; \boldsymbol{r}, \boldsymbol{s}, [x, y]\ (x \in \boldsymbol{x}, y \in \boldsymbol{y});\ \boldsymbol{P_r} \right\rangle$ atau $\left\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}; \boldsymbol{r}, \boldsymbol{s}, [x, y]\ (x \in \boldsymbol{x}, y \in \boldsymbol{y});\ \boldsymbol{P_s} \right\rangle$
5. $\left\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}; \boldsymbol{r}, \boldsymbol{s}, [x, y]\ (x \in \boldsymbol{x}, y \in \boldsymbol{y});\ \boldsymbol{P_r}, \boldsymbol{P_s} \right\rangle$
6. $\left\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}; \boldsymbol{r}, \boldsymbol{s}, [x, y]\ (x \in \boldsymbol{x}, y \in \boldsymbol{y});\ \boldsymbol{P_x}, \boldsymbol{P_r} \right\rangle$ atau $\left\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}; \boldsymbol{r}, \boldsymbol{s}, [x, y]\ (x \in \boldsymbol{x}, y \in \boldsymbol{y});\ \boldsymbol{P_y}, \boldsymbol{P_s} \right\rangle$
7. $\left\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}; \boldsymbol{r}, \boldsymbol{s}, [x, y]\ (x \in \boldsymbol{x}, y \in \boldsymbol{y});\ \boldsymbol{P_x}, \boldsymbol{P_s} \right\rangle$ atau $\left\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}; \boldsymbol{r}, \boldsymbol{s}, [x, y]\ (x \in \boldsymbol{x}, y \in \boldsymbol{y});\ \boldsymbol{P_y}, \boldsymbol{P_r} \right\rangle$
8. $\left\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}; \boldsymbol{r}, \boldsymbol{s}, [x, y]\ (x \in \boldsymbol{x}, y \in \boldsymbol{y});\ \boldsymbol{P_x}, \boldsymbol{P_y}, \boldsymbol{P_r} \right\rangle$ atau
   $\left\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}; \boldsymbol{r}, \boldsymbol{s}, [x, y]\ (x \in \boldsymbol{x}, y \in \boldsymbol{y});\ \boldsymbol{P_x}, \boldsymbol{P_y}, \boldsymbol{P_s} \right\rangle$
9. $\left\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}; \boldsymbol{r}, \boldsymbol{s}, [x, y]\ (x \in \boldsymbol{x}, y \in \boldsymbol{y});\ \boldsymbol{P_x}, \boldsymbol{P_r}, \boldsymbol{P_s} \right\rangle$ atau
   $\left\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}; \boldsymbol{r}, \boldsymbol{s}, [x, y]\ (x \in \boldsymbol{x}, y \in \boldsymbol{y});\ \boldsymbol{P_y}, \boldsymbol{P_r}, \boldsymbol{P_s} \right\rangle$
10. $\left\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}; \boldsymbol{r}, \boldsymbol{s}, [x, y]\ (x \in \boldsymbol{x}, y \in \boldsymbol{y});\ \boldsymbol{P_x}, \boldsymbol{P_y}, \boldsymbol{P_r}, \boldsymbol{P_s} \right\rangle$.

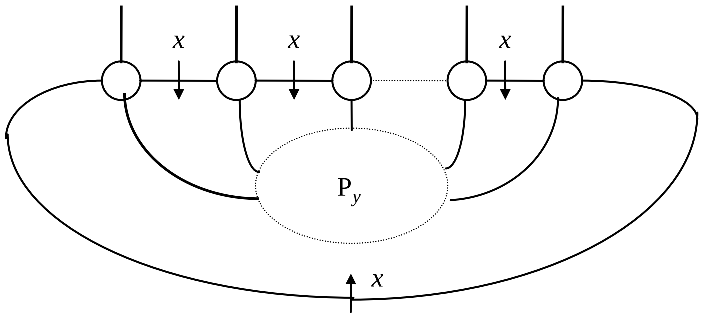
Perhatikan bahawa pasangan bentuk dalam (2), (4), (6), (7), (8) dan (9) adalah simetri. Jadi adalah memadai untuk dipertimbangkan bentuk yang pertama sahaja bagi setiap pasangan tersebut. Keputusan yang diperoleh boleh disimpulkan dalam teorem berikut:

Teorem. *Permasalahan gambar bagi persembahan-3 hasil darab langsung yang prinsipal adalah boleh ditentukan dan bebas daripada (tidak bergantung kepada) permasalahan perkataan.*

3. Pembuktian

Pembuktian dilakukan mengikut bentuk-bentuk yang telah disenaraikan di atas. Boleh dianggapkan semua gambar sfera diturunkan dan tidak mengandungi dwikutub. Gambar sfera yang tidak diturunkan atau mengandungi dwikutub adalah setara dengan gambar hampa. Rujuk [2,5].

Juga ditakrifkan *cakera-**x*** dan *cakera-**y*** masing-masing adalah cakera di dalam gambar sfera P yang mempunyai label unsur-unsur dalam $\boldsymbol{x}$ dan $\boldsymbol{y}$ sahaja manakala *cakera penukar tertib* ialah cakera yang berlabel $[x, y]$ dengan $x \in \boldsymbol{x},\ y \in \boldsymbol{y}$. *Kitaran-x* ialah satu lingkaran berlabel x yang berbentuk



dengan subgambar P_y di dalam kitaran-x tersebut berlabel dengan unsur-unsur dalam $\boldsymbol{y}$.

Kitaran-y juga ditakrifkan sama seperti kitaran-x dengan menggantikan x dengan y. Perhatikan bahawa sebarang gambar sfera □ yang diturunkan dan tidak mengandungi dwikutub adalah bersifat seperti berikut:

(a) Gambar □ mengandungi cakera-***x*** atau cakera-***y*** sahaja.

(b) Gambar □ mengandungi cakera penukar tertib jika dan hanya jika wujud cakera-***x*** dan cakera-***y*** dalam □. Maka mesti wujud satu kitaran-x atau kitaran-y.

Pertimbangkan semua bentuk-bentuk persembahan prinsipal yang disenaraikan di atas.

Bentuk 1

Jelas □ tidak setara dengan gambar hampa kerana □ gambar diturunkan.

Bentuk 2

Gambar □ setara (modulo $\boldsymbol{P_x}$) dengan gambar hampa jika dan hanya jika □ mengandungi cakera-***x*** sahaja kerana $\boldsymbol{P_x}$ menjana $\pi_2\left(\langle \boldsymbol{x}; \boldsymbol{r} \rangle\right)$.

Bentuk 3

Andaikan gambar □ mengandungi cakera-$\boldsymbol{x}$ atau cakera-$\boldsymbol{y}$ sahaja. Maka seperti dalam bentuk 2, gambar □ setara (modulo $\boldsymbol{P_x}$) atau (modulo $\boldsymbol{P_y}$) dengan gambar hampa. Jika gambar □ mengandungi cakera-$\boldsymbol{x}$ dan juga cakera-$\boldsymbol{y}$ maka mesti wujud cakera penukar tertib yang menyambungkannnya. Jadi gambar □ tidak setara (modulo $\boldsymbol{P}$) dengan gambar hampa.

Bentuk 4

Andaikan gambar □ mengandungi cakera-$\boldsymbol{x}$ atau cakera-$\boldsymbol{y}$ sahaja. Maka □ tidak setara (modulo $\boldsymbol{P}$) dengan gambar hampa kerana set $\boldsymbol{P}$ tidak mengandungi penjana $\boldsymbol{\pi}_2(\langle \boldsymbol{x; r}\rangle)$ dan $\boldsymbol{\pi}_2(\langle \boldsymbol{y; s}\rangle)$. Gambar □ yang mengandungi cakera penukar tertib setara (modulo $\boldsymbol{P}$) dengan gambar hampa jika dan hanya jika wujud kitaran-y kerana boleh digunakan set gambar dalam $\boldsymbol{P_s}$.

Bentuk 5

Jelas gambar □ yang mengandungi cakera-$\boldsymbol{x}$ atau cakera-$\boldsymbol{y}$ sahaja tidak setara (modulo $\boldsymbol{P}$) dengan gambar hampa. Set $\boldsymbol{P_s}$ dan $\boldsymbol{P_r}$ dalam $\boldsymbol{P}$ menunjukkan bahawa semua gambar yang mengandungi cakera penukar tertib adalah setara (modulo $\boldsymbol{P}$) dengan gambar hampa.

Bentuk 6

Gambar-gambar yang setara (modulo $\boldsymbol{P}$) dengan gambar hampa adalah gambar-gambar yang mengandungi cakera-$\boldsymbol{x}$ sahaja atau gambar-gambar yang tidak mengandungi sebarang kitaran-x. Kitaran-x memerlukan set $\boldsymbol{P_s}$ untuk dihapuskan.

Bentuk 7

Jelas gambar yang setara (modulo $\boldsymbol{P}$) dengan gambar hampa adalah gambar yang mengandungi cakera-$\boldsymbol{x}$ sahaja kerana $\boldsymbol{P_x}$ menjana $\pi_2(\langle \boldsymbol{x; r}\rangle)$. Set $\boldsymbol{P_s}$ tidak berfungsi tanpa adanya set $\boldsymbol{P_y}$.

Bentuk 8

Ketiadaan set $\boldsymbol{P_s}$ dalam $\boldsymbol{P}$ menunjukkan bahawa gambar yang mengandungi kitaran-y adalah tidak setara (modulo $\boldsymbol{P}$) dengan gambar hampa. Manakala gambar yang mengandungi cakera-$\boldsymbol{x}$ sahaja atau yang mengandungi kitaran-x adalah setara (modulo $\boldsymbol{P}$) dengan gambar hampa.

Bentuk 9

Jelas jika □ mengandungi cakera-$\boldsymbol{y}$ maka □ tidak setara (modulo $\boldsymbol{P}$) dengan gambar hampa kerana ketiadaan set $\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{y}}$. Jadi gambar yang mengandungi cakera-$\boldsymbol{x}$ sahaja atau cakera-$\boldsymbol{x}$ dan kitaran-y sahaja yang setara (modulo $\boldsymbol{P}$) dengan gambar hampa.

Bentuk 10

Set $\boldsymbol{P}$ merupakan penjana $\pi_2\left(\left\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}; \boldsymbol{r}, \boldsymbol{s}, [x, y]\ (x \in \boldsymbol{x}, y \in \boldsymbol{y})\right\rangle\right)$. Maka semua gambar sfera adalah setara (modulo $\boldsymbol{P}$) dengan gambar hampa.

Kita simpulkan yang permasalan gambar bagi bentuk prinsipal boleh ditentukan.

Rujukan

1. A.G. Ahmad, The picture problem for 3-complexes, akan terbit dalam *Southeast Asian Bulletin of Mathematics*.
2. Y.G. Baik, J. Harlander dan S.J. Pride, The geometry of group extensions, *J. Group Theory 1* (1998), 395−416.
3. R.A. Fenn, *Techniques in Geometric Group Theory*, LMS lecture notes 57, Cambridge University Press, 1983.
4. V. Guba dan M. Sapir, Diagram Groups, *Memoirs of the American Mathematical Society* **620** (1997).
5. S.J. Pride, Identities among relations of groups presentations, dalam *Group Theory from Geometrical Viewpoint-Trieste* 1990, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Singapura (1991), 687−717.
6. C.C. Squier, A finiteness condition for rewriting system, revision by F. Otto and Y. Kobayashi, *Theoret. Comput. Sci*. **131** (1994), 271−294.