BULLETIN of the MALAYSIAN MATHEMATICAL SCIENCES SOCIETY

Bull. Malaysian Math. Sc. Soc. (Second Series) **26** (2003) 109–127

Kumpulan-Kumpulanoid

[1]ABDUL RAZAK SALLEH DAN [2]ROSLAN HASNI @ ABDULLAH

[1]Pusat Pengajian Sains Matematik, Fakulti Sains dan Teknologi, Universiti Kebangsaan Malaysia, 43600 UKM Bangi, Selangor Darul Ehsan, Malaysia

[2]Pusat Pengajian Sains Matematik, Universiti Sains Malaysia, 11800 USM, Pulau Pinang, Malaysia

e-mail: aras@pkrisc.cc.ukm.my

Abstract. Dalam makalah ini, kami meneliti sifat-sifat aljabar bagi kumpulan-kumpulanoid. Kami bina kumpulan-kumpulanoid hasil darab, subkumpulan-kumpulanoid normal, mendapatkan kumpulan-kumpulanoid hasil bahagi dan akhirnya memberi penekanan kepada morfisma kumpulan-kumpulanoid.

1. Pendahuluan

Kategori dan fungtor adalah objek aljabar yang memainkan peranan penting dalam bidang matematik. Satu contoh kategori yang menjadi asas perbincangan dalam makalah ini ialah kumpulanoid, yang telah diperkenalkan oleh Brandt pada tahun 1926 dan dibangunkan oleh Higgins [8]. Verdier pada tahun 1965 telah mengkaji kategori kumpulan-kumpulanoid dan membuktikan bahawa kategori kumpulan-kumpulanoid dan kategori modul tersilang adalah setara. Keputusan ini turut digunakan oleh Duskin pada tahun 1969. Walaupun hasil kajian mereka tidak diterbitkan tetapi Brown & Spencer [6] akhirnya menghebahkan keputusan ini dengan mempertimbangkan kumpulanoid asasi πX bagi suatu kumpulan topologi X. Brown dan Spencer turut memberi takrif kategori kumpulan-kumpulanoid secara terperinci. Selanjutnya Brown dan Spencer telah memperluaskan hasil ini dengan membuktikan kesetaraan di antara homotopi pada dua kategori. Brown & Mucuk [5] mengitlakkan konsep penudung bagi kumpulan topologi dengan menggunakan hasil kerja moden terhadap penudung kumpulanoid. Kajian tentang kategori kumpulan-kumpulanoid juga telah dilakukan oleh Brown dan Mucuk dengan memberikan takrif baru dan beberapa perluasan daripada hasil Brown dan Spencer.

Dalam makalah ini, kami mengkaji sifat-sifat aljabar bagi kumpulan-kumpulanoid dengan lebih mendalam. Kami akan berikan beberapa hasil dan keputusan yang berkaitan dengan kumpulan-kumpulanoid sebagai kemuncak kepada penulisan ini.

Sebelum itu, kami nyatakan beberapa konsep dasar dan beberapa hasil yang diperlukan untuk perbincangan selanjutnya. Semua takrif asas dan hasil berkaitan ini dirujuk kepada [1], [2], [3], [7] hingga [10].

2. Preliminari

Kami mulakan dengan memberi beberapa takrif asas yang berkaitan.

Takrif 2.1. *Suatu kategori K mengandungi*

(i) *Set* $\mathrm{Ob}(K)$ *yang disebut set objek bagi K.*

(ii) *Untuk setiap* $x,\ y \in \mathrm{Ob}(K)$, *set* $K(x, y)$ *disebut set morfisma dalam K daripada x kepada* y. *Morfisma juga sering disebut sebagai jemparing atau anak panah.*

(iii) *Suatu fungsi yang disebut penggubahan, yang untuk setiap* $f \in K(x, y)$ *dan* $g \in K(y, z)$, *diumpuk suatu unsur* $g \circ f$ *dalam* $K(x, z)$. *Dengan kata lain, penggubahan adalah fungsi*

$$\circ : K(y, z) \times K(x, y) \to K(x, z)$$
$$(g, f) \mapsto g \circ f$$

yang mematuhi aksiom-aksiom berikut:

(KAT1) Hukum Kalis Sekutuan:

Jika $f \in K(x, y),\ g \in K(y, z),\ h \in K(z, w)$, *maka*

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f .$$

(KAT2) Kewujudan Identiti:

Untuk setiap $x \in \mathrm{Ob}(K)$, *terdapat suatu unsur identiti* $1_x \in K(x, x)$ *sehingga jika* $f \in K(x, y),\ g \in K(w, x)$, *maka*

$$1_x \circ g = g,$$
$$f \circ 1_x = f.$$

Takrif 2.2. *Fungtor* $T : K \to L$ *daripada kategori K kepada kategori L mengumpukkan kepada setiap objek x bagi K suatu objek* Tx *bagi L dan kepada setiap morfisma* $f : x \to y$ *dalam K suatu morfisma* $Tf : Tx \to Ty$ *dalam L sehinggakan mematuhi aksiom-aksiom berikut:*

(A1) *Jika* $1_x : x \to x$ *identiti dalam K, maka* $T1_x : Tx \to Tx$ *adalah suatu identiti dalam L, iaitu* $T1_x = 1_{Tx}$.

(A2) *Jika* $f : x \to y,\ g : y \to z$ *ialah morfisma dalam K, maka*

$$T(gf) = TgTf.$$

Takrif 2.3. *Andaikan K dan L kategori. Maka L dinamakan subkategori bagi K jika*

(i) *setiap objek L adalah objek K, iaitu* $\mathrm{Ob}(L) \subseteq \mathrm{Ob}(K)$;

(ii) *untuk setiap* $x,\ y \in \mathrm{Ob}(L),\ L(x, y) \subseteq K(x, y)$;

(iii) *penggubahan morfisma di dalam L adalah sama dengan penggubahan morfisma di dalam K;*

(iv) *untuk setiap* $x \in \mathrm{Ob}(L)$, *suatu identiti di dalam* $L(x, x)$ *adalah juga suatu identiti di dalam* $K(x, x)$.

Seterusnya,

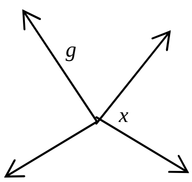
(v) *subkategori L bagi kategori K dikatakan penuh jika* $L(x, y) = K(x, y)$, *untuk semua* $x,\ y \in \mathrm{Ob}(L)$;

(vi) *subkategori L bagi kategori K dikatakan lebar jika* $\mathrm{Ob}(L) = \mathrm{Ob}(K)$.

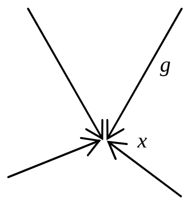
Sekarang diberikan beberapa takrif dan hasil yang dipetik daripada [1], [2] dan [3] yang akan digunakan dalam perbincangan selanjutnya.

Takrif 2.4. *Kumpulanoid G adalah suatu kategori yang setiap morfismanya tersongsangkan.*

Kita tulis $\mathrm{Ob}(G)$ sebagai set objek G dan morfisma kumpulanoid G sebagai unsur bagi G, iaitu $a \in Mor(G)$ ditulis sebagai $a \in G$. Oleh itu G boleh dicamkan dengan kesatuan set $G(x, y)$, untuk semua $x,\ y \in \mathrm{Ob}(G)$. Kita tulis $p, s : G \to \mathrm{Ob}(G)$ yang p punca dan s sasaran. Gubahan $g \circ h$ tertakrif jika $sg = ph$. Identiti pada $x \in \mathrm{Ob}(G)$ ditulis 1_x. Songsangan suatu unsur g ditulis g^{-1}. Untuk suatu $x \in \mathrm{Ob}(G)$, kita tandakan bintang $x = \{g \in G \mid pg = x\} = G^x$ sebagai Bint x dan kobintang $x = \{g \in G \mid sg = x\} = G_x$ sebagai Kobint x yang ditunjukkan melalui gambar rajah di bawah:



Bint $x = G^x$



Kobint $x = G_x$

Contoh 2.5.

(i) Kumpulan adalah suatu kumpulanoid dengan satu objek.

(ii) Hubungan kesetaraan R adalah suatu kumpulanoid dengan $Ob(R) = X$ dan $Mor(R) = (x, y) \in R$ yang x berhubungan dengan y.

Takrif 2.6. *Kumpulanoid G dikatakan berkait jika* $G(x, y) \neq \varnothing$, *untuk semua x,* $y \in \mathrm{Ob}(G)$. *G dikatakan diskret jika unsur-unsurnya terdiri daripada identiti sehingga kumpulanoid boleh dikenal pasti melalui set objeknya. Jika* $x \in \mathrm{Ob}(G)$, *maka di bawah penggubahan morfisma, set* $G(x, x)$ *ialah suatu kumpulan, ditulis* $G(x)$ *dan disebut kumpulan objek atau kumpulan bucu bagi G pada x.*

Takrif 2.7. *Andaikan G suatu kumpulanoid. Suatu subkumpulanoid bagi G adalah subkategori H bagi G sehingga* $a \in H$ *mengimplikasikan* $a^{-1} \in H$.

Subkumpulanoid H bagi G dikatakan *penuh* jika $H(x, y) = G(x, y)$ untuk semua x, $y \in \mathrm{Ob}(H)$, dan *lebar* jika $\mathrm{Ob}(H) = \mathrm{Ob}(G)$.

Contoh 2.8. Andaikan $T : G \to H$ suatu morfisma kumpulanoid. Maka

(i) Inti T adalah set unsur $a \in G$ sehingga $T(a)$ merupakan suatu unsur identiti dalam H, iaitu Inti $T = \{a \in G \mid Ta = 1_y\}$, yang 1_y adalah suatu identiti bagi $y \in H$. Maka Inti T adalah suatu subkumpulanoid lebar bagi G.

(ii) $\mathrm{Im}\,T$ adalah set bagi unsur $T(a)$, yang a suatu unsur dalam G. Tetapi Im T hanyalah subgraf bagi H kerana gubahan sebarang dua unsur Im T bukanlah suatu unsur Im T. Maka Im T tidak semestinya merupakan suatu subkumpulanoid bagi H.

Contoh 2.9. [1]. Andaikan I kumpulanoid dengan dua objek 0, 1 dan morfisma bukan identiti $\iota \in I(0,1)$, $\iota^{-1} \in I(1,0)$. Maka sebarang morfisma tak malar $T : I \to \boldsymbol{Z}$ ($\boldsymbol{Z}$ adalah kumpulan integer terhadap penambahan) mempunyai imej bukan subkumpulan dan oleh itu Im T bukan merupakan subkumpulanoid bagi $\boldsymbol{Z}$.

Usulan 2.10. *Andaikan* $T : G \to H$ *suatu morfisma kumpulanoid sehingga* $\mathrm{Ob}(T) : \mathrm{Ob}(G) \to \mathrm{Ob}(H)$ *merupakan suatu injeksi. Maka* $\mathrm{Im}\,T$ *adalah suatu subkumpulanoid bagi H dan morfisma bersahaja*

$$G / \mathrm{Inti}\,T \to \mathrm{Im}\,T$$

adalah suatu isomorfisma.

Takrif 2.11. *Andaikan* $T : G \to H$ *suatu morfisma kumpulanoid. Serabut* T *pada* $y \in \mathrm{Ob}(H)$ *adalah suatu subkumpulanoid bagi* G *yang unsurnya dipetakan oleh* T *kepada identiti pada y; ditulis* $T^{-1}(y)$. *Maka Inti T ialah kesatuan tak bercantum bagi serabut* $T^{-1}(y)$ *untuk semua* $y \in \mathrm{Ob}(H)$.

3. Kumpulan-kumpulanoid

Dalam makalah ini, kami akan memberi penekanan kepada kajian beberapa sifat aljabar yang berkaitan dengan kategori kumpulan-kumpulanoid. Kami akan menggunakan hasil [3], [5] dan [6].

Sebagai permulaannya, dinyatakan beberapa takrif dan hasil daripada [5] dan [6]. Hasil-hasil ini akan digunakan untuk memperoleh keputusan-keputusan yang berikutnya.

Takrif 3.1. *Kumpulan-kumpulanoid ialah suatu kumpulanoid* G *yang dilengkapi dengan*

$\bullet : G \times G \to G$ *yang* $\bullet$ *adalah fungtor,*
$e : \{*\} \to G$ *yang* $*$ *adalah tunggalan,*
$u : G \to G$

yang masing-masing dinamai pendaraban, identiti dan songsangan yang mematuhi semua aksiom kumpulan.

Seterusnya, pendaraban bagi a, b dalam G ditulis sebagai ab, $e(*)$ ditulis sebagai e dan $u(a)$ ditulis sebagai a^{-1}. Dalam hal ini, Brown dan Mucuk mentakrifkan bahawa morfisma kumpulanoid (fungtor) memberikan struktur kumpulan dalaman kepada kategori kumpulanoid. Sementara itu, penggubahan dalam G bagi suatu morfisma (jemparing) $a : x \to y$ dengan morfisma $b : y \to z$ ditulis sebagai $a \circ b$ dan songsangan untuk operasi $\circ$ bagi *a* ditulis sebagai $\bar{a}$.

Dalam teori kumpulan, suatu identiti *e* adalah bitara dalam suatu kumpulan *G*. Tetapi dalam kasus kumpulan-kumpulanoid ini, struktur kumpulan dalaman memberikan lebih daripada satu unsur identiti, iaitu bergantung pada suatu objek di dalam kumpulan-kumpulanoid. Walau bagaimanapun untuk setiap objek, identitinya adalah bitara.

Jika *e* identiti untuk struktur kumpulan pada $\mathrm{Ob}(G)$, maka 1_e adalah identiti untuk struktur kumpulan pada jemparing. Songsangan bagi jemparing *g* ditulis $\bar{g}$. Maka $G \to G$, yang $g \mapsto \bar{g}$ adalah suatu morfisma kumpulanoid.

Seterusnya, oleh sebab pendaraban dalam kumpulan-kumpulanoid merupakan suatu morfisma kumpulanoid, maka diperoleh *Hukum Saling Tukar*, iaitu

$$(a \circ g)(b \circ h) = (ab) \circ (gh), \text{ untuk semua } a, b, g, h \in G$$

sekiranya $a \circ g$ dan $b \circ h$ tertakrif.

Adalah menjadi natijah yang biasa daripada Hukum Saling Tukar bahawa di dalam kumpulan-kumpulanoid, penggubahan bagi unsur kumpulanoid boleh diperoleh daripada pendaraban dalam kumpulan. Perhubungan ini diberikan di dalam [5] yang akan dibincangkan nanti.

Sekarang kami berikan beberapa contoh kumpulan-kumpulanoid.

Contoh 3.2. Kategori *Kump* yang morfismanya terdiri daripada isomorfisma adalah suatu kumpulan-kumpulanoid. Khususnya suatu kumpulan, iaitu kumpulanoid dengan satu objek, adalah suatu kumpulan-kumpulanoid.

Contoh 3.3. Kategori *Abel* yang morfismanya terdiri daripada isomorfisma adalah suatu kumpulan-kumpulanoid.

Oleh sebab kumpulan-kumpulanoid adalah suatu kumpulanoid dengan sifat-sifat tertentu dan fakta daripada [3] yang menyatakan, jika K_1 dan K_2 adalah kumpulanoid, maka hasil darab Cartesan $K_1 \times K_2$ adalah kumpulanoid. Adalah munasabah untuk mengitlakkan keputusan Brown tersebut kepada penghasilan suatu kumpulan-kumpulanoid hasil darab.

Usulan 3.4. *Andaikan K_1, K_2 adalah kumpulan-kumpulanoid. Maka hasil darab Cartesan $K_1 \times K_2$ adalah suatu kumpulan-kumpulanoid.*

Bukti. Kita perlu mentakrifkan operasi-operasi pendaraban, identiti dan songsangan pada $K_1 \times K_2$ dan seterusnya menunjukkan aksiom kalis sekutuan, aksiom identiti dan aksiom songsangan dipatuhi. Perhatikan bahawa

$$\bullet : (K_1 \times K_2) \times (K_1 \times K_2) \to K_1 \times K_2$$
$$((a_1, a_2), (b_1, b_2)) \mapsto (a_1 b_1, a_2 b_2)$$

yang $a_1 b_1$, $a_2 b_2$ masing-masing tertakrif dalam K_1, K_2 .

$$e : \{*\} \times \{*\} \to K_1 \times K_2$$
$$(*, *) \mapsto (e, e)$$
$$u : K_1 \times K_2 \to K_1 \times K_2$$
$$(a_1, a_2) \mapsto (a_1^{-1}, a_2^{-1}).$$

Andaikan (a_1, a_2), (b_1, b_2) dan (c_1, c_2) di dalam $K_1 \times K_2$, maka

$$\begin{aligned}
\big((a_1, a_2) \bullet (b_1, b_2)\big) \bullet (c_1, c_2) &= (a_1 b_1, a_2 b_2) \bullet (c_1, c_2) \\
&= ((a_1 b_1) c_1, (a_2 b_2)\, c_2) \\
&= (a_1 (b_1 c_1),\ a_2 (b_2 c_2)) \\
&= (a_1, a_2) \bullet (b_1 c_1,\ b_2 c_2) \\
&= (a_1, a_2) \bullet ((b_1, b_2) \bullet (c_1, c_2))
\end{aligned}$$

Jadi $\bullet$ mematuhi hukum kalis sekutuan.
Andaikan (a_1, a_2) di dalam $K_1 \times K_2$. Maka

$$\begin{aligned}
(e, e) \bullet (a_1, a_2) &= (ea_1, ea_2) \\
&= (a_1, a_2) \\
&= (a_1 e,\ a_2 e) \\
&= (a_1, a_2) \bullet (e, e).
\end{aligned}$$

Maka (e, e) adalah identiti bagi $K_1 \times K_2$.
Untuk $(a_1, a_2) \in K_1 \times K_2$, wujud $(a_1^{-1}, a_2^{-1}) \in K_1 \times K_2$ sehingga

$$\begin{aligned}
(a_1,\ a_2) \bullet (a_1^{-1},\ a_2^{-1}) &= (a_1 a_1^{-1},\ a_2 a_2^{-1}) \\
&= (e,\ e) \\
&= (a_1^{-1} a_1,\ a_2^{-1} a_2) \\
&= (a_1^{-1},\ a_2^{-1}) \bullet (a_1,\ a_2).
\end{aligned}$$

Maka $(a_1^{-1},\ a_2^{-1})$ adalah songsangan bagi (a_1, a_2).

Oleh yang demikian struktur kumpulan teraruh di dalam kategori $K_1 \times K_2$. K_1 dan K_2 kumpulan-kumpulanoid mengimplikasikan bahawa K_1 dan K_2 adalah kumpulanoid dan [3] menyatakan bahawa $K_1 \times K_2$ adalah juga kumpulanoid. Jadi $K_1 \times K_2$ adalah suatu kumpulan-kumpulanoid.

Seterusnya, sebagai natijah daripada Usulan 3.4, diperoleh korolari berikut:

Korolari 3.5. *Andaikan* $\{K_i\}$, $i = 1, 2, \cdots, n$ *suatu famili kumpulan-kumpulanoid. Maka hasil darab Cartesan* $\prod_{i=1}^{n} K_i = K_1 \times K_2 \times \cdots \times K_n$ *adalah suatu kumpulan-kumpulanoid.*

Bukti. Dengan menggunakan Usulan 3.4 dan menggunakan aruhan pada *n*.

Sekarang dinyatakan beberapa keputusan daripada [5] dan [6] yang diperlukan untuk pembuktian bagi keputusan selanjutnya dalam makalah ini.

Usulan 3.6. *Andaikan G suatu kumpulan-kumpulanoid dan $a \circ b$ tertakrif dalam G yang $a \in G(x, y)$. Maka*

$$a \circ b = a\overline{1_y}\, b.$$

Catatan. Perhatikan daripada keputusan di atas, kita boleh mendapatkan penggubahan kumpulanoid di dalam kumpulan-kumpulanoid daripada pendaraban kumpulan.

Usulan berikut memberikan hubungan antara songsangan $\overline{a}$ dalam kumpulanoid dengan songsangan a^{-1} dalam kumpulan, bagi $a \in G(x, y)$.

Usulan 3.7. *Andaikan $a \in G(x, y)$. Maka*

$$a^{-1} = 1_y\ \overline{a}\, 1_x\, .$$

Lanjutan daripada Usulan 3.6, diperoleh usulan berikut:

Usulan 3.8. *Andaikan G suatu kumpulan-kumpulanoid dan $a \circ b$ tertakrif dalam G yang $a \in G(x, y)$. Jika $g \in G(e)$, maka*

$$ag\,\overline{a} = 1_x\, g\overline{1_x}.$$

Bukti.

$$\begin{aligned}
a \circ (1_y\, g) \circ a^{-1} &= a \circ [(1_y\, g) \circ (a^{-1} 1_e)] \\
&= a \circ [(1_y \circ a^{-1})\,(g \circ 1_e)], && \text{Hukum Saling Tukar} \\
&= a \circ [(a^{-1})\,(g)] \\
&= a \circ (a^{-1} g) \\
&= (a1_e) \circ (a^{-1} g) \\
&= (a \circ a^{-1})\,(1_e \circ g), && \text{Hukum Saling Tukar} \\
&= (1_x)(g) \\
&= 1_x\, g\,. && (1)
\end{aligned}$$

Sementara itu,

$$\begin{aligned} a \circ (1_y g) \circ a^{-1} &= (a\overline{1}_y 1_y g) \circ a^{-1} \\ &= (ag) \circ (1_y \overline{a}\ 1_x), \qquad\qquad \text{oleh sebab } a^{-1} = 1_y \overline{a}\, 1_x \\ &= (ag) \circ (\overline{1}_y 1_y \overline{a}\, 1_x) \\ &= ag\ \overline{1}_y 1_y\ \overline{a}\, 1_x \\ &= ag\, \overline{a}\, 1_x\,. \end{aligned} \tag{2}$$

Daripada (1) dan (2) diperoleh

$$\begin{aligned} ag\,\overline{a}\,1_x &= 1_x g \\ (ag\,\overline{a}\,1_x)\,\overline{1}_x &= (1_x g)\,\overline{1}_x \\ ag\,\overline{a} &= 1_x g\,\overline{1}_x\,. \end{aligned}$$

Sebagai natijah daripada Usulan 3.8 diperoleh korolari berikut:

Korolari 3.9. *$G(e)$ adalah kumpulan Abelan.*

Catatan. Hakikat bahawa $G(e)$ Abelan adalah unsur-unsur $\mathrm{Kobint}_G e$ dan $\mathrm{Bint}_G e$ kalis tukar tertib terhadap operasi kumpulan.

Seterusnya diberikan hasil berikut:

Korolari 3.10. *Jika a, $a_1 \in \mathrm{Kobint}_G e$ dan a mempunyai titik awal x, diperoleh bahawa $a 1_x^{-1} \in \mathrm{Bint}_G e$ dan bertukar tertib dengan a_1. Maka*

$$a^{-1} a_1 a = 1_x^{-1}\, a_1 1_x\,.$$

4. Subkumpulan-kumpulanoid

Secara literalnya, subkumpulan-kumpulanoid adalah suatu sub(kumpulan-kumpulanoid) yang bersamaan dengan kumpulan-subkumpulanoid, dan bukannya dalam bentuk yang lain seperti sub(kumpulan)-kumpulanoid dan subkumpulan-subkumpulanoid.

Seterusnya diberikan takrif berikut:

Takrif 4.1. *Andaikan G suatu kumpulan-kumpulanoid. Suatu subkumpulanoid H bagi G dinamakan subkumpulan-kumpulanoid bagi G sekiranya morfisma kumpulanoid memberikan struktur kumpulan kepada H.*

Seterusnya,
(i) Subkumpulan-kumpulanoid H bagi G dikatakan penuh jika

$$H(x, y) = G(x, y)\text{, untuk semua } x,\ y \in \mathrm{Ob}(H).$$

(ii) Subkumpulan-kumpulanoid H bagi G dikatakan lebar jika $\mathrm{Ob}((H) = \mathrm{Ob}(G)$.

Contoh 4.2. *Abel* yang morfismanya isomorfisma adalah suatu subkumpulan-kumpulanoid penuh bagi *Kump* yang morfismanya isomorfisma kerana $Abel(K, K') = Kump(K, K')$ untuk semua $x,\ y \in \mathrm{Ob}(Abel)$.

Contoh 4.3. Andaikan G suatu kumpulan-kumpulanoid. Biarkan $x \in \mathrm{Ob}(G)$. Maka $G(x)$ adalah subkumpulan-kumpulanoid penuh bagi G ke atas suatu objek G.

5. Subkumpulan-kumpulanoid normal

Dalam bahagian ini kami berikan beberapa hasil penting yang merupakan analogi kepada hasil [5] dan [6]. Kami akan menggunakan kaedah yang serupa untuk pembuktian beberapa keputusan kami.

Terlebih dahulu, dinyatakan beberapa takrif dan hasil daripada subkumpulanoid normal yang dirujuk daripada [1] dan [3].

Takrif 5.1. *Subkumpulanoid N bagi G disebut normal jika N lebar dalam G dan untuk semua* $x,\ y \in \mathrm{Ob}(G)$ *dan* $a \in G(x, y)$,

$$a^{-1}N\{y\}a = N\{x\}.$$

Contoh 5.2. Andaikan $f : G \to H$ suatu morfisma kumpulanoid. Maka Inti *f* adalah suatu subkumpulanoid normal dan lebar bagi *G*. Adalah nyata Inti *f* lebar dalam *G* dan kenormalan diperoleh daripada

$$f(aba^{-1}) = fafbfa^{-1} = fafa^{-1} = 1,\ \ b \in N\{x\},\ a \in G(x, y).$$

Sekarang diperluaskan Takrif 5.1, maka diperoleh takrif berikut.

Takrif 5.3. *Andaikan G suatu kumpulan-kumpulanoid. Subkumpulan-kumpulanoid N bagi G dikatakan normal jika N lebar dan untuk semua* $x, y \in \mathrm{Ob}(G)$ *dan* $a \in G(x, y)$,

$$a^{-1}N\{y\}\,a = N\{x\}.$$

Ini mengimplikasikan bahawa

$$a \circ b \circ a^{-1} \in N\{x\}, \text{ untuk } a \in G(x, y), \ b \in N\{y\}.$$

Seterusnya diberikan hasil berikut:

Korolari 5.4. [5]. *Andaikan* $N(e)$ *suatu subkumpulan bagi* $G(e)$ *dan N suatu famili subset* $N(x) = 1_x N(e)$, *untuk semua* $x \in \mathrm{Ob}(G)$. *Maka* $N(x)$ *adalah suatu subkumpulanoid normal bagi G.*

Catatan. Pada amnya semua kumpulan objek *G* adalah berisomorfisma dan Abelan. Ini dapat diperhatikan daripada [3] (Usulan 6.3.1). Cuma dalam hal ini, *G* adalah kumpulan-kumpulanoid berkait.

6. Kumpulan-kumpulanoid hasil bahagi

Dalam bahagian ini, akan ditunjukkan bahawa suatu kumpulan-kumpulanoid hasil bahagi dapat dibina. Namun terlebih dahulu kami merujuk kepada takrif dan hasil yang diberi di dalam [1].

Takrif 6.1. *Kumpulanoid hasil bahagi ditakrifkan seperti berikut: Objek bagi* G/N *ialah kelas kesetaraan bagi objek G di bawah hubungan* $x \sim y$ *jika* $N(x, y) \neq \varnothing$. *Unsur* G/N *ialah kelas kesetaraan bagi unsur G di bawah hubungan* $g \sim h$ *jika terdapat unsur a, b bagi N supaya* agb *tertakrif dan* $agb = h$. *Penggubahan morfisma dalam* G/N *diaruh oleh penggubahan morfisma dalam G.*

Takrif 6.2. *Unjuran* $p : G \to G/N$ *adalah suatu morfisma kumpulanoid yang semesta bagi morfisma* f *dari G supaya* $\mathrm{Im}\, f$ *diskret. Sebarang morfisma semesta, yang membentuk* p *diikuti oleh suatu isomorfisma, disebut pemetaan hasil bahagi.*

Sekarang kami berikan hasil yang beranalogi dengan [3] (Usulan 8.3.1).

Usulan 6.3. *Andaikan G suatu kumpulan-kumpulanoid dan N suatu subkumpulan-kumpulanoid lebar, tak berkait menyeluruh dan normal bagi G. Maka* G/N *adalah suatu kumpulan-kumpulanoid.*

Bukti. Untuk menunjukkan *G*/*N* adalah suatu kumpulanoid sila lihat [3] dan yang lebih terperinci diberikan di dalam [11].

Sekarang kita perlu menunjukkan struktur kumpulan pada *G*/*N*. Daripada morfisma kumpulanoid,

$$\begin{aligned} \bullet : G/N \times G/N &\to G/N \\ (aN\{x\},\, bN\{y\}) &\mapsto aN\{x\}\, bN\{y\} = abN\{x\} \end{aligned}$$

yang jelas memberikan struktur kumpulan di dalam kategori kumpulanoid G/N. Ini mengimplikasikan bahawa G/N adalah suatu kumpulan-kumpulanoid.

Catatan. Usulan 6.3 hanya benar jika *N* subkumpulan-kumpulanoid normal. G/N disebut sebagai kumpulan-kumpulanoid hasil bahagi bagi *G*.

Seterusnya kami akan memberikan hasil seperti di dalam [5]. Tetapi dalam hal ini, kami akan mentakrifkan bahawa G/N mengandungi semua koset kanan $N\{x\}a$ yang $a \in G(x, y)$. Maka diperoleh keputusan berikut:

Usulan 6.4. *Andaikan* G/N *suatu kumpulan-kumpulanoid dan* $N\{x\}a \circ N\{y\}b$ *tertakrif dalam* G/N *yang* $N\{x\}a \in G/N(x, y)$. *Maka*

$$N\{x\}a \circ N\{y\}b = N\{x\}\, a\overline{N\{y\}}N\{y\}b\,.$$

Jika seterusnya $N\{e\}g \in G/N(e)$, *diperoleh*

$$N\{x\}aN\{e\}g\overline{N\{x\}a} = N\{x\}N\{e\}g\overline{N\{x\}}\,.$$

Bukti.

$$\begin{aligned} N\{x\}a \circ N\{y\}b &= N\{x\}(a \circ b) \\ &= N\{x\}\,(a\overline{1}_y\, b)\,, && \text{daripada Usulan 3.6} \\ &= N\{x\}a\,\overline{N\{y\}}\,N\{y\}b\,. \end{aligned}$$

Sementara itu,

$$\begin{aligned} &N\{x\}a \circ (N\{y\}N\{e\}g) \circ N\{y\}a^{-1} \\ &= N\{x\}a \circ [(N\{y\}N\{e\}g) \circ N\{y\}a^{-1}N\{e\}] \\ &= N\{x\}a \circ [(N\{y\} \circ N\{y\}a^{-1})\,(N\{e\}g \circ N\{e\})] \\ &= N\{x\}a \circ [(N\{y\}a^{-1})\,(N\{e\}g)] \\ &= N\{x\}aN\{e\} \circ [(N\{y\}a^{-1}N\{e\}g)] \\ &= (N\{x\}a \circ N\{y\}a^{-1}\,(N\{e\} \circ N\{e\}g) \\ &= N\{x\}N\{e\}g\,. \end{aligned}$$

Seterusnya,

$$\begin{aligned} & N\{x\}a \circ (N\{y\}N\{e\}g) \circ N\{y\}a^{-1} \\ &= (N\{x\}a\overline{N\{y\}}\ N\{y\}\ N\{e\}g) \circ N\{y\}a^{-1} \\ &= (N\{x\}a\ N\{e\}g) \circ N\{y\}\ \overline{N\{x\}a}\ N\{x\}) \\ &= (N\{x\}a\ N\{e\}g) \circ \overline{N\{y\}}\ N\{y\}\ \overline{N\{x\}a}\ N\{x\}) \\ &= N\{x\}a\ N\{e\}g\ \overline{N\{y\}}\ N\{y\}\ \overline{N\{x\}a}\ N\{x\} \\ &= N\{x\}a\ N\{e\}g\ \overline{N\{x\}a}\ N\{x\}. \end{aligned}$$

Maka ini mengimplikasikan bahawa

$$\begin{aligned} N\{x\}a\ N\{e\}g\ \overline{N\{x\}a}\ N\{x\} &= N\{x\}\ N\{e\}g \\ N\{x\}a\ N\{e\}g\ \overline{N\{x\}a}\ N\{x\}\ \overline{N\{x\}} &= N\{x\}\ N\{e\}g\ \overline{N\{x\}} \\ N\{x\}a\ N\{e\}g\ \overline{N\{x\}a} &= N\{x\}\ N\{e\}g\ \overline{N\{x\}}. \end{aligned}$$

Sebagai natijah daripada Usulan 6.4 diperoleh korolari berikut:

Korolari 6.5. *$G / N(e)$ adalah Abelan.*

7. Morfisma kumpulan-kumpulanoid

Dalam bahagian ini, kami akan menyatakan tentang morfisma bagi kumpulan-kumpulanoid dan kami merujuk kepada kefahaman morfisma kumpulanoid seperti yang diberikan dalam bahagian sebelumnya. Seterusnya akan diberikan beberapa keputusan yang akan dibincangkan selanjutnya.

Takrif 7.1. *Pertimbangkan suatu kategori kumpulan-kumpulanoid. Suatu morfisma bagi kumpulan-kumpulanoid ialah morfisma bagi kumpulanoid pendasar $\phi : G \to G'$ yang mengawet struktur kumpulan. Kumpulan-kumpulanoid dan morfisma bagi kumpulan-kumpulanoid membentuk suatu kategori yang ditandai Kump-Kumpd [5].*

Sekarang diperkenalkan usulan berikut:

Usulan 7.2. *Andaikan $\phi : G \to G'$ morfisma kumpulan-kumpulanoid dan $a \circ b$ tertakrif dalam G yang $a \in G(x, y)$. Maka*

(i) $\phi(1_x) = 1_{\phi(x)}$,

(ii) $\phi(a^{-1}) = (\phi a)^{-1}$,

(iii) $\phi(a \circ b) = \phi(a)\ \overline{1}_{\phi(y)}\ \phi(b)$.

Bukti. Mudah, lihat [11].

Andaikan $\phi : G \to G'$ suatu morfisma kumpulan-kumpulanoid. Inti ϕ ditakrif seperti untuk kumpulan dan kumpulanoid, iaitu

$$\text{Inti}\,\phi = \{a \in G \mid \phi a = 1\}.$$

Brown [3] telah menunjukkan bahawa $\text{Im}\,\phi$ tidak semestinya merupakan suatu subkumpulanoid dan oleh yang demikian tidak boleh menjadi suatu subkumpulan-kumpulanoid. Sebaliknya, $\text{Inti}\,\phi$ adalah suatu subkumpulanoid lebar bagi *G*.

Berdasarkan penjelasan ini, kita peroleh hasil yang serupa untuk kasus kumpulan-kumpulanoid.

Seterusnya diberikan contoh berikut:

Contoh 7.3. Andaikan $\phi : G \to G'$ morfisma kumpulan-kumpulanoid. Maka $\text{Inti}\,\phi$ adalah suatu subkumpulan-kumpulanoid lebar bagi *G*.

Bukti. Andaikan $a \in \text{Inti}\,\phi$.
Maka

$$\phi(a^{-1}) = (\phi a)^{-1} = 1$$

yang mengimplikasikan bahawa $a^{-1} \in \text{Inti}\,\phi$. Oleh itu, $\text{Inti}\,\phi$ adalah suatu subkumpulanoid. Struktur kumpulan pada *G* mengimplikasikan bahawa $\text{Inti}\,\phi$ adalah suatu subkumpulan. Maka $\text{Inti}\,\phi$ adalah suatu subkumpulan-kumpulanoid bagi *G*. $\text{Inti}\,\phi$ adalah lebar kerana $\text{Ob}(\text{Inti}\ \phi) = \text{Ob}(G)$.

Contoh 7.4. Andaikan $\phi : G \to G'$ morfisma kumpulan-kumpulanoid. Maka $\text{Inti}\,\phi$ adalah suatu subkumpulan-kumpulanoid normal bagi *G*.

Bukti. Kita telah menunjukkan bahawa $\text{Inti}\,\phi$ adalah suatu subkumpulan-kumpulanoid lebar bagi *G*. Jadi tinggal untuk kita tunjukkan bahawa $\text{Inti}\,\phi$ adalah normal.
Daripada

$$\begin{aligned} a \circ b \circ a^{-1} &= (a\overline{1}_y\, b) \circ a^{-1} && \text{daripada Usulan 3.6} \\ &= (a\,\overline{1}_y\, b)1_y\, a^{-1} \\ &= a\,\overline{1}_y\, b1_y\, a^{-1}. \end{aligned}$$

Maka

$$\begin{aligned}
\phi(a \circ b \circ a^{-1}) &= \phi(a\overline{1}_y\, b 1_y\, a^{-1}) \\
&= \phi(a)\,\phi(\overline{1}_y)\,\phi(b)\,\phi(1_y)\,\phi(a^{-1}) \\
&= \phi(a)\,\phi(\overline{1}_y)\,(1)\,\phi(1_y)\,\phi(a^{-1}) \qquad \text{kerana } b \in \operatorname{Inti}\phi\{y\} \\
&= \phi(a)\phi(a^{-1}) \\
&= \phi(a)\left[\phi(a)\right]^{-1} \\
&= 1
\end{aligned}$$

Ini mengimplikasikan bahawa $a \circ b \circ a^{-1} \in \operatorname{Inti}\phi$. Oleh itu diperoleh bahawa $\operatorname{Inti}\phi$ adalah normal.

Untuk mengatasi masalah bagi $\operatorname{Im}\phi$ tersebut, dalam [3] Brown telah menyatakan Usulan 8.3.2 dengan memberikan syarat $\operatorname{Ob}(\phi)$ adalah injeksi. Maka diperoleh bahawa $\operatorname{Im}\phi$ adalah suatu subkumpulanoid bagi G'.

Sekarang kami memberikan satu keputusan yang merupakan analogi kepada [3] (Usulan 8.3.2).

Usulan 7.5. *Andaikan $f : G \to H$ suatu morfisma kumpulan-kumpulanoid sehingga $\operatorname{Ob}(f)$ merupakan suatu injeksi. Maka*

(i) $\operatorname{Im} f$ *adalah suatu subkumpulan-kumpulanoid bagi H;*

(ii) *morfisma bersahaja $G/\operatorname{Inti} f \to \operatorname{Im} f$ adalah suatu isomorfisma.*

Bukti.

(i) Dalam [3] telah dibuktikan bahawa dengan syarat $\operatorname{Ob}(f)$ injeksi, $\operatorname{Im} f$ adalah suatu subkumpulanoid bagi *H*. Jadi kita hanya perlu menunjukkan bahawa morfisma kumpulanoid memberikan struktur kumpulan kepada $\operatorname{Im} f$. Perhatikan

$$\begin{aligned}
\bullet : \operatorname{Im} f \times \operatorname{Im} f &\to \operatorname{Im} f \\
(fa, fb) &\mapsto fafb = f(ab)
\end{aligned}$$

yang memberikan struktur kumpulan kepada kumpulanoid $\operatorname{Im} f$. Ini mengimplikasikan bahawa $\operatorname{Im} f$ adalah suatu subkumpulan-kumpulanoid bagi *H*.

(ii) Pembuktian morfisma bersahaja $G/\operatorname{Inti} f \to \operatorname{Im} f$ adalah isomorfisma telah ditunjukkan dalam [3] (Usulan 8.3.2).

Andaikan $F : G/\text{Inti } f \to \text{Im } f$. Bagi kasus ini, kita perlu memberikan penjelasan tentang morfisma kumpulan-kumpulanoid F yang mengawet struktur kumpulan. Perhatikan

$$\begin{aligned} F &: G/\text{Inti } f \to \text{Im } f \\ & N\{x\}a \mapsto fa = F(N\{x\}a) \end{aligned}$$

Untuk $N\{x\}a,\ N\{y\}b \in G/\text{Inti } f$,

$$\begin{aligned} F(N\{x\}a\, N\{y\}b) &= F(N\{x\}ab), && \text{oleh kerana Inti } f \text{ normal} \\ &= f(ab) \\ &= f(a)\, f(b), && f \text{ fungtor} \\ &= F(N\{x\}\, a)\, F(N\{y\}\, b). \end{aligned}$$

Ini mengimplikasikan bahawa F adalah suatu homomorfisma yang mengawet struktur kumpulan.

Seterusnya dinyatakan natijah daripada Usulan 6.3 yang telah dibincangkan terdahulu.

Korolari 7.6. *Andaikan G suatu kumpulan-kumpulanoid dan N suatu subkumpulan-kumpulanoid lebar, tak berkait menyeluruh dan normal bagi G. Maka diperoleh suatu morfisma* $p : G \to G/N$ *supaya p menghapuskan N dan semesta untuk morfisma dari G yang menghapuskan N.*

Bukti. Dalam [3] telah ditunjukkan wujudnya suatu morfisma *p* sehingga *p* menghapuskan *N* dan bersifat semesta untuk morfisma dari *G* yang menghapuskan *N*.

Seterusnya kita perlu memberikan penjelasan tentang morfisma *p* mengawet struktur kumpulan. Perhatikan

$$\begin{aligned} p &: G \to G/N \\ & a \mapsto N\{x\}\, a = p(a) \end{aligned}$$

Maka untuk $a, b \in G$,

$$\begin{aligned} p(ab) &= N\{x\}\, ab \\ &= N\{x\}a\, N\{y\}\, b, && \text{oleh kerana } N \text{ normal} \\ &= p(a)\, p(b). \end{aligned}$$

Ini mengimplikasikan bahawa *p* adalah suatu homomorfisma yang mengawet struktur kumpulan.

Selanjutnya, diperkenalkan usulan berikut:

Usulan 7.7. *Andaikan* $\phi : G \to G'$ *suatu morfisma kumpulan-kumpulanoid dan V suatu subkumpulan-kumpulanoid bagi* G'. *Maka* $\phi^{-1}(V)$ *adalah suatu subkumpulan-kumpulanoid bagi G.*

Bukti. Andaikan $a \in \phi^{-1}(V)$. Maka $\phi\, a \in V$.
Oleh sebab *V* suatu subkumpulan-kumpulanoid bagi G', maka

$$\phi(a^{-1}) = (\phi a)^{-1} \in V$$

Oleh itu, $a^{-1} \in \phi^{-1}(V)$.

Struktur kumpulan pada *G* dan G' mengaruh struktur kumpulan pada $\phi^{-1}(V)$. Oleh yang demikian $\phi^{-1}(V)$ adalah suatu subkumpulan-kumpulanoid bag *G*.

8. Cadangan kajian lanjutan

Dalam bahagian ini kami berikan beberapa persoalan yang mungkin boleh dibuat kajian selanjutnya.

1. Dalam [5] dan [6] telah ditunjukkan bahawa

$$\begin{aligned} \pi_1 : \mathit{Kump\,Top} &\to \mathit{Kump\text{-}Kumpd} \\ G &\mapsto \pi_1 G \end{aligned}$$

adalah suatu fungtor. Berdasarkan hasil ini, satu kajian mungkin boleh dibuat untuk mendapatkan keputusan berikut:

(a) Andaikan *G*, G' kumpulan topologi. Satu keputusan yang mungkin boleh dicapai adalah jika *G* berisomorfisma dengan G', maka $\pi_1 G$ berisomorfisma dengan $\pi_1 G'$.

(b) Daripada fakta bahawa suatu fungtor π mengawet hasil darab, dalam [3] Brown telah membuktikan bahawa jika $X = X_1 \times X_2$ yang X_1 dan X_2 adalah ruang topologi, maka πX berisomorfisma dengan $\pi X_1 \times \pi X_2$. Jadi satu kemungkinan adalah untuk menunjukkan bahawa jika $G = G_1 \times G_2$ yang G_1 dan G_2 kumpulan topologi, maka $\pi_1(G_1 \times G_2)$ berisomorfisma dengan $\pi_1 G_1 \times \pi_1 G_2$.

2. Teorem Van Kampen (juga dikenali sebagai Teorem Seifert) dihasilkan secara berasingan oleh Seifert pada tahun 1931 dan Van Kampen pada tahun 1933. Teorem ini digunakan untuk mengira kumpulan asasi bagi ruang topologi.

   Andaikan diberi suatu ruang adjungsi $W_f \coprod Z$ sebagai tolakan keluar berikut:

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "f"] \arrow[d] & W \arrow[d] \\ Z \arrow[r] & W_f \coprod Z \end{tikzcd}$$

   Andaikan C suatu subset bagi Z terwakili dalam Z dan dalam Y, D suatu subset bagi W yang terwakili dalam W, $f[C] \subseteq D$, $g = f \,|\, C \cap Y$, D dan $B = D_g \coprod C$. Maka Teorem Van Kampen ([3]: 8.4.2) mengatakan bahawa gambar rajah kumpulanoid asasi berikut:

$$\begin{tikzcd} \pi YC \arrow[r, "f"] \arrow[d] & \pi WD \arrow[d] \\ \pi ZC \arrow[r] & \pi(W_f \coprod Z)B \end{tikzcd}$$

adalah suatu tolakan keluar jika dan hanya jika morfisma

$$p : \pi(M(f) \cup Z)\, A \to \pi(W_f \coprod Z)\, B$$

yang $A = D \cup C$, dan $M(f)$ suatu silinder pemetaan bagi f, adalah suatu kesetaraan homotopi bagi kumpulanoid. Khususnya gambar rajah di atas adalah suatu tolakan keluar jika (Z, Y) terkoserabut.

Satu kemungkinan adalah untuk mendapatkan analogi Teorem Van Kampen ini dengan menggunakan kumpulanoid asasi bagi kumpulan topologi.

Penghargaan. Kami mengambil kesempatan ini untuk mengucapkan berbanyak-banyak terima kasih kepada Universiti Kebangsaan Malaysia (UKM) atas segala kemudahan yang telah diberikan untuk penyelidikan ini. Pengarang kedua juga berterima kasih kepada Universiti Sains Malaysia atas biayaan yang telah diberi semasa mengikuti program ijazah Sarjana Sains di UKM.

Rujukan

1. R. Brown, Fibration of groupoids, *Journal of Algebra* **15** (1969), 103–132.
2. R. Brown, From groups to groupoids : A brief survey. *Bull. London Math. Soc*. **19** (1987), 113–134.
3. R. Brown, *Topology: A geometric account of general topology, homotopy types and the fundamental groupoids*, Chichester: Ellis Horwood Limited, 1988.
4. R. Brown and P.J. Higgins, On the connection between the second relative homotopy groups of some related spaces, *Proc. London Math. Soc*. **36** (1978), 93–212.
5. R. Brown and O. Mucuk, Covering groups of non-connected topological groups revisited, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc*. **115** (1993), 97–109.
6. R. Brown and C.B. Spencer, *g*–groupoid, crossed modules and the fundamental groupoid of a topological group, *Proc. Konn. Ned. Akad. v. Wet.* **79** (1976), 296–302.
7. J.B. Fraleigh, *Kursus Pertama Aljabar Niskala,* Terj. Abu Osman Md. Tap & Abdul Razak Salleh, Kuala Lumpur: Dewan Bahasa dan Pustaka, 1988.
8. P.J. Higgins, *Categories and groupoids*, London: Van Nostrand Reinhold, 1971.
9. S. MacLane, *Categories for the working mathematician*, New York: Springer-Verlag, 1971.
10. B. Mitchell, *Theory of categories*, New York: Academic Press, 1965.
11. Roslan bin Hasni @ Abdullah, Kumpulan-kumpulanoid, *Kajian Ilmiah Sarjana Sains*, Pusat Pengajian Sains Matematik, Fakulti Sains dan Teknologi, Universiti Kebangsaan Malaysia, 2000.