BULLETIN of the MALAYSIAN MATHEMATICAL SCIENCES SOCIETY

Bull. Malaysian Math. Sc. Soc. (Second Series) **26** (2003) 231–239

Pengquantuman Sistem Kepler-Newton-Coulomb dalam Matra Dua Menerusi Aljabar Lie

AHMAD FARIS BIN ABDUL RAZAK DAN SHAHARIR BIN MOHAMAD ZAIN

Pusat Pengajian Sains Matematik, Fakulti Sains dan Teknologi, Universiti Kebangsaan Malaysia, 43600 UKM Bangi, Selangor Darul Ehsan, Malaysia

e-mail: rir@pkrisc.cc.ukm.my

Abstrak. Aras tenaga sistem Kepler-Newton-Coulomb quantum bermatra dua, yang selama ini diperoleh menerusi penyelesaian persamaan Shroedinger yang sepadannya, diperoleh secara kaedah aljabar Lie. Aljabar Lie yang diperoleh adalah berisomorfisma dengan Aljabar Lie matriks spin Pauli yang mewakili kumpulan uniter dua matra.

1. Latar Belakang

Sistem Kepler-Newton-Coulomb ialah sistem dua-jasad masing-masingnya berjisim dan bercas (m_i, q_i), $i = 1, 2$ yang mematuhi hukum potensi Newton dan hukum potensi Coulomb sehingga Hamiltonan sistem ini ialah

$$H(r_1, r_2, p_1, p_2) = \frac{1}{2m_1} p_1{}^2 + \frac{1}{2m_2} p_2{}^2 + \frac{Gm_1m_2 + \varepsilon_\circ q_1q_2}{|r_1 - r_2|} \tag{1}$$

apabila p_i ialah momentum zarah ke-i, r_i kedudukan zarah ke-i, G pemalar kegravitian semesta dan ε_o pemalar dalam hukum Coulomb (pemalar ketelapan cas dalam ruang vakuo). Dengan memilih sistem koordinat r kedudukan relatif antara dua jisim ini dan koordinat R kedudukan pusat jisim, yang takrifnya

$$r = r_1 - r_2, \tag{2}$$

$$R = \frac{m_1 r_1 + m_2 r_2}{M}, \tag{3}$$

$$M = m_1 + m_2, \text{ jumlah jisim,} \tag{4}$$

dan dengan mentakrifkan

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{M}, \text{ jisim susutan,} \tag{5}$$

maka sistem Hamiltonan (1) menjelma secara kanunnya kepada Hamiltonan baru

$$K(r, R, p, P) = \tfrac{1}{2\mu} p^2 + \tfrac{1}{2M} P^2 + \frac{\alpha}{|r|} \tag{6a}$$

dengan p dan P masing-masingnya momentum zarah susutan dan zarah pusatan itu, manakala

$$\alpha = Gm_1m_2 + \varepsilon_o q_1 q_2 \tag{6b}$$

ialah suatu pemalar (Lihat umpamanya Goldstein (1980) dengan gaya klasik, dan Thirring (1998) dengan gaya moden). Oleh itu kajian pengquantuman sistem dua jasad Kepler-Newton-Coulomb tertumpu pada sistem Hamiltonan bagi jasad susutan:

$$H_{(\mu)}(r, p) = \frac{1}{2\mu} p^2 + \frac{\alpha}{|r|} \tag{7}$$

Penentuan aras tenaga sistem Hamiltonan (7) ini dalam ruang (iaitu ruang konfigurasi bermatra tiga, atau r dan p masing-masingnya memiliki tiga komponen) telah dilakukan oleh peneroka mekanik quantum, khususnya Schroedinger pada 1923 lagi seperti yang ditelusuri oleh Mott dan Sneddon (1948/1963), menerusi persamaan Schroedinger itu, dan telah menjadi batu tanda kejayaan mekanik quantum yang pertama, lalu perkara ini muncul dalam hampir setiap buku teks mekanik quantum sekurang-kurangnya sejak tahun 1930-an lagi (yang terawal yang dapat kami kesani ialah Pauling dan Wilson (1935)). Malah setakat yang kami temui buku-buku teks tahun-tahun berikutnya juga membicarakan masalah atom hidrogen atau masalah Kepler-Newton-Coulumb hanya dalam matra tiga sahaja. Hasilnya memanglah terkenal walaupun penjelasan matematiknya dalam buku-buku teks itu masih boleh diperkemaskan seperti yang ditunjukkan oleh Karim (1988) dan Ahmad Faris (1999), sehingga aras tenaga bagi sistem Kepler-Newton-Coulomb, khususnya aras tenaga atom hidrogen, diperoleh sebagai

$$E_n = -\frac{\kappa}{2a_B n^2}, \quad n \text{ integer} \tag{8a}$$

$$a_B = \frac{\mu^2}{\hbar\alpha e^2}, \quad \text{jejari Bohr , (} e \text{ cas elektron)} \tag{8b}$$

$$\kappa = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_\circ} \tag{8c}$$

Pengquantuman sistem Kepler-Newton-Coulomb dalam matra dua tidak banyak yang meminatinya, sedangkan secara klasiknya sistem ini memanglah terturun kepada persamaan terbitan dalam matra dua sahaja sehingga melahirkan orbitnya sebagai keratan kon itu. Namun aras tenaga sistem (7) dalam matra-2 menerusi persamaan Schroedinger mungkin dianggap sebagai kasus remeh yang tidak menimbulkan apa-apa masalah, sehingga sarjana yang membicarakannya amatlah sedikit. Malah yang dapat kami kesani, mereka yang menganggap kasus matra dua perlu ditangani dengan hati-hati ialah Huang dan Kozycki (1979), Hassoun (1981), Dasgupta (1981) dan Karim (1988), lalu masing-masingnya memperoleh aras tenaga bagi keadaan terikatnya yang agak berbeza daripada kasus matra-3, iaitu

$$E_n = -\frac{\kappa}{2a_B(n+\frac{1}{2})^2}, \quad n \text{ integer} \tag{9a}$$

Kasus matra satu hanya ditimbang oleh beberapa orang sahaja dan yang menonjolkan kenovelan masalah dalam matra satu ini ialah Hassoun (1981) dan Karim (1988) dan mereka ini menunjukkan aras tenaganya yang agak berbeza lagi.

Sementara itu, Kajian aras tenaga atom hidrogen menerusi kaedah aljabar Lie telah juga dilakukan hampir serentak dengan kaedah menerusi persamaan Schroedinger itu yang boleh disurih hingga kepada Pauli pada tahun 1926 lagi seperti yang dibicarakan dalam buku Miller (1972), dan secara tidak langsungnya juga dalam formulasi mekanik matriks oleh Heisenberg pada 1927 yang dapat dilihat dalam buku mekanik quantumnya (Heisenberg (1949)). Buku terawal dan secara tidak langsungnya membicarakan kumpulan Lie dan oleh itu aljabar Lie, atas nama kumpulan simetri, dalam mekanik quantum ialah Wigner (1931/1959) dan Weyl (1931) dan diikuti oleh buku-buku tahun berikutnya, termasuklah atas nama pengquantuman geometri, seperti Fano dan Rao (1996) dan Inui *et al.* (1996). Sepertilah dengan kaedah Schroedinger, setiap pengarang ini termasuk buku Englefield (1972) yang khas membicarakan judul ini, menumpukan kepada kasus sistem Kepler-Newton-Coulomb dalam matra-3 sahaja dan menghasilkan aras tenaga yang sama dengan yang diperoleh menerusi persamaan Schroedinger itu, iaitu persamaan (8). Ringkasnya, dalam menyelesaikan masalah ini, pertamanya diperoleh (dibuktikan) keputusan-keputusan dalam mekanik klasik tentang tanda kurung Poisson (TKP) bagi kuantiti momentum sudutan

$$L = r \times p, \tag{10}$$

vektor Laplace-Runge-Lenz

$$M = (p \times L)/\mu - \frac{\alpha}{|r|}r \tag{11}$$

dan Hamiltonan (7), iaitu

$$[L, H_{(\mu)}]_{TKP} = 0 \tag{12}$$

dan

$$\left[M , H_{(\mu)} \right]_{TKP} = 0 \tag{13}$$

serta tanda kurung Poisson di kalangan komponen *L* dan *M*, iaitu

$$\left[L_i , L_j \right]_{TKP} = \sum_{s=1}^{3} \varepsilon_{ijs} L_s \tag{14a}$$

dengan

$$\varepsilon_{ijs} = \begin{cases} 1 & , \quad \text{jika } ijs = 123,\ 231,\ 312 \\ -1 & , \quad \text{jika } ijs = 132,\ 213,\ 321 \\ 0 & , \quad \text{selain daripada di atas} \end{cases} \tag{14b}$$

$$\left[M_i , M_j \right]_{TKP} = -\frac{2H_{(\mu)}}{\mu} \sum_{s=1}^{3} \varepsilon_{ijs} M_s \tag{15}$$

dan

$$\left[M_i , L_j \right]_{TKP} = \sum_{s=1}^{3} \varepsilon_{ijs} M_s \tag{16}$$

.

Penjelasan keabadian $H_{(\mu)}$ dan *L*, iaitu persamaan (12) dapat dilihat dalam banyak buku teks mekanik klasik, umpamanya Marion (1970), Kleppner dan Kolenkow (1978), dan Arya (1998); dan keabadian *M*, iaitu persamaan (13), dapat dilihat dalam Goldstein (1975, 1980) dan Heintz (1976); manakala aljabar Lie terhadap tanda kurung Poisson ini dapat dilihat dalam Abraham dan Marseden (1978), dan Thirring (1998). Hakikat tiadanya lagi pemalar gerakan lain bagi sistem ini, yang tidak bersandar pada pemalar-pemalar yang telah ditemui itu, dijamin oleh teorem berkenaan dengan sistem terkamirkan seperti yang dihurai di dalam Thirring (1998) itu. Versi mekanik quantumnya, iaitu dalam bentuk penukar tertib pengoperasi $[\,,]$, menerusi homomorfima Dirac:

fungsi atas pemboleh ubah kanun $(x, p) \mapsto$ pengoperasi $(x,\ -k\hbar\nabla)$ atas ruang Hilbert

$$[A, B]_{TKP} \mapsto \frac{1}{k\hbar}[A, B] \equiv \frac{1}{k\hbar}(AB - BA),\ k^2 = -1$$

dengan $\hbar$ ialah suatu pemalar yang dikenali sebagai pemalar Planck-Dirac, atau kiraan terus, ialah

$$\left[L, H_{(\mu)}\right] = 0 = \left[M, H_{(\mu)}\right] = 0 \tag{17}$$

$$\left[L_i, L_j\right] = k\hbar \sum_{s=1}^{3} \varepsilon_{ijs} L_s \quad , \tag{18}$$

$$\left[M_i, M_j\right] = -\frac{2k\hbar}{\mu} \sum_{s=1}^{3} \varepsilon_{ijs} L_s \tag{19}$$

$$\left[M_i, L_j\right] = k\hbar \sum_{s=1}^{3} \varepsilon_{ijs} M_s \tag{20}$$

Kemudian dibuktikan L dan M ini adalah penjana infinitesimal bagi kumpulan Lie yang ada hubungan dengan kumpulan ortogon istimewa dalam matra-3, OIs(3), suatu kumpulan simetri (kumpulan penjelmaan yang mengekalkan Hamiltonan) bagi mekanik klasik yang Hamiltonannya diberikan oleh (7) itu, yang unsur asas aljabar Lie-nya, *ois*(3), memenuhi persamaan tukar tertib yang berikut:

$$\left[K_i, K_j\right] = k \sum_{s=1}^{3} \varepsilon_{ijs} K_s \tag{21}$$

Perhatikan $\{L_i \ : \ i = 1, 2, 3\}$ memang memenuhi struktur asas unsur *ois*(3), tetapi sistem L dan M yang memenuhi persamaan (17)–(20) perlu dikaji kemungkinannya memenuhi perluasan kepada aljabar Lie *ois*(3) ini. Kejayaan besarnya ialah, penemuan

$$F = \frac{1}{2}(L + N), \ N = \sqrt{-\frac{\mu}{2H_{(\mu)}}} \ M \tag{22}$$

$$G = \frac{1}{2}(L - N) \tag{23}$$

yang setiap satunya pemalar gerakan, iaitu

$$\left[F, H_{(\mu)}\right] = 0 = \left[G, H_{(\mu)}\right] \tag{24}$$

dan masing-masing komponennya, memenuhi aljabar Lie *ois*(3), iaitu

$$\left[F_i, F_j\right] = k\hbar \sum_{s=1}^{3} \varepsilon_{ijs} F_s \tag{25}$$

$$\left[G_i , G_j \right] = k\hbar \sum_{s=1}^{3} \varepsilon_{ijs} G_s \tag{26}$$

sedangkan F dan G kalis tukar tertib (saling tidak bersandar antara satu dengan yang lain), iaitu

$$\left[F_i , G_j \right] = 0 \quad \text{, untuk setiap } i \text{ dan } j \tag{27}$$

Ini bermakna F dan G ialah penjana *ois*(3) $\times$ *ois*(3) sehingga $F.F$ dan $G.G$ berupa pengoperasi Casimir kumpulan OIs(3) $\times$ OIs(3) yang berisomorfisma dengan OIs(4). (Lihat Fano dan Rao (1996)) dan berisomorfisma pula dengan OIs(3,1) kumpulan penjelmaan Lorentz (Lihat umpamanya Carmeli dan Malin (1976)). Seterusnya aras tenaga sistem Kepler-Newton-Coulomb, dengan atom hidrogen sebagai kasus istimewanya seperti (8) , diperoleh dengan mengambil perhatian bahawa

$$F^2 + G^2 = \frac{1}{2}(L^2 + N^2) = \tfrac{1}{2} L^2 - \frac{1}{2}\frac{\mu}{2E}\left\{ \left(\frac{2E}{\mu}\left(L^2 + \hbar^2 \right) \right) + \left(\frac{2\mu}{\hbar} \right)^2 \right\} \tag{28}$$

dan nilai eigen $F^2 + G^2$ ialah $2j(j+1)\hbar^2$, j integer. Sorotan terbaru tentang kaedah aljabar Lie ini terdapat dalam tesis Ahmad Faris (1999).

Untuk kasus sistem Kepler-Newton-Coulomb bermatra-2, perolehan aras tenaga menerusi aljabar Lie tidak dapat kami kesani dalam susastera. Seseorang tentunya mudah menyedari bahawa aljabar Lie *ois*(2) yang mewakili kumpulan Lie OIs(2), kumpulan ortogon istimewa atas satah tidak cukup untuk mewakili aljabar Lie yang lengkap bagi sistem ini walaupun Hamiltonan sistem Kepler-Newton-Coulomb dalam matra dua adalah invarian terhadap kumpulan ini, sama seperti yang berlaku dalam matra tiga, tetapi tidak juga aljabar Lie *ois*(2) $\times$ *ois*(2) seperti yang ditunjukkan di bawah ini, yang intipatinya sudah pun dilaporkan dalam tesis Ahmad Faris (1999).

2. Ajabar Lie daripada sistem Kepler-Newton-Coulomb dalam matra-2

Hamiltonan sistem Kepler-Newton-Coulomb ialah

$$H_{(\mu)} = \frac{1}{2\mu}\left({p_1}^2 + {p_2}^2 \right) - \alpha / |r| \ , \ r = (x_1, x_2) \tag{2.1}$$

manakala kuantiti yang seanalog dengan momentum sudutan yang dijangka dapat menjadi pemalar gerakan sistem ini ialah suatu skalar

$$L = \left(x_1 p_2 - x_2 p_1 \right) \tag{2.2}$$

dan dua lagi kuantiti yang dijangka juga pemalar gerakan dan seanalog dengan vektor Laplace-Runge-Lenz ialah $M = (M_1, M_2)$,

$$M_1 = \tfrac{1}{\mu} p_2 L - \alpha x_1 / |r| \tag{2.3}$$

$$M_2 = -\tfrac{1}{\mu} p_1 L - \alpha x_2 / |r| \tag{2.4}$$

Segala harapan di atas tercapai, iaitu dengan menerusi homormorfisma Dirac, atau pengkuantuman terus kuantiti-kuantiti di atas menerusi pensimetrian, jika perlu, diperoleh

$$\left[L, H_{(\mu)}\right] = \left[M_1, H_{(\mu)}\right] = \left[M_2, H_{(\mu)}\right] = 0 \tag{2.5}$$

$$\left[M_1, L\right] = -k\hbar M_2 \tag{2.6}$$

$$\left[M_2, L\right] = k\hbar M_1 \tag{2.7}$$

$$\left[M_1, M_2\right] = -\frac{2k\hbar}{\mu} L \tag{2.8}$$

Mengikut cara yang serupa seperti dalam matra-3 di atas, maka hubungan tukar tertib di atas dipermudahkan untuk kasus keadaan tenaga terikat (tenaga $E < 0$) dengan memperkenalkan vektor $N = (N_1, N_2)$,

$$N_1 = \sqrt{-\frac{\mu}{2E}}\, M_1 \quad , \quad N_2 = \sqrt{-\frac{\mu}{2E}}\, M_2 \tag{2.9}$$

lalu diperoleh

$$\left[L, H_{(\mu)}\right] = \left[N_1, H_{(\mu)}\right] = \left[N_2, H_{(\mu)}\right] = 0 \tag{2.10}$$

$$\left[N_1, L\right] = -k\hbar N_2 \tag{2.11}$$

$$\left[N_2, L\right] = k\hbar N_1 \tag{2.12}$$

$$\left[N_1, N_2\right] = k\hbar L \tag{2.13}$$

Aljabar Lie yang dijanakan oleh $\{N_1, N_2, L\}$ ini jelas bukannya aljabar Lie *ois*(2) atau hasil darabnya kerana aljabar Lie *ois*(2) mempunyai hanya dua penjana, tetapi aljabar ini sama dengan aljabar Lie matriks spin Pauli (Lihat umpamanya Carmeli dan Malin (1976), Jones (1990), Fano dan Rao (1996)) yang dijanakan oleh tiga matriks spin Pauli yang terkenal itu,

$$\sigma_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & -k \\ k & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{2.14}$$

Matriks-matriks ini memenuhi hubungan tukar tertib

$$\left[\sigma_i, \sigma_j\right] = k\sum_{s=1}^{3} \varepsilon_{ijs}\sigma_s \tag{2.15}$$

yang berupa penjana infinitesimal kumpulan uniter istimewa dua matra, UIs(2) seperti yang terdapat dalam rujukan-rujukan di atas dan dalam Elliot dan Dawber (1979) dan Normand (1980). Kumpulan ini berhomomorfisma dengan OIs(3) (Lihat umpamanya Bohm (1993), Fano dan Rao dan Inui *et al.* (1996)). Hakikat OIs(3) berisomorfisma dengan UIs(3)/Z^2, Z^2 subkumpulan normal dengan UIs(2) juga dapat dilihat dalam Elliot dan Dawber 1979). Pengoperasi Casimir untuk UIs(2) ialah

$$Q^2 = \sum_{i=1}^{3} \sigma_i^{\,2} = N_1^{\,2} + N_2^{\,2} + L^2 \tag{2.16}$$

Oleh itu nilai eigen bagi pengoperasi Casimir ini ialah $q(q+1)\hbar^2$, $q = 0, 1, 2, \cdots$ (Lihat juga Normand (1980) untuk justifikasi yang agak berlainan sedikit akan sebabnya nilai eigen ini sedemikian). Perhatikan berbezanya nilai eigen ini dengan nilai eigen pengoperasi Casimir dalam OIs(3) $\times$ OIs(3) yang berupa Kumpulan Lie bagi sistem Kepler-Newton-Coulomb dalam matra-3 itu. Seterusnya diperoleh

$$Q^2 = \left(-\frac{\mu}{2E}\right)\left\{\left(\frac{2K_{(r)}}{\mu}\right)\left(L^2 + \frac{\hbar^2}{4}\right) + \left(\frac{2\mu}{\hbar}\right)^2\right\} + L^2 = -\frac{\mu}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{E}\left(\frac{2\mu}{\hbar}\right)^2\right) \tag{2.17}$$

Dengan ini maka diperoleh aras tenaga sistem Kepler-Newton-Coulomb dalam matra-2 khususnya atom hidrogen dalam matra-2 sama seperti yang diperoleh menerusi persamaan Schroedinger, persamaan (9) di atas.

Rujukan

1. R. Abraham, dan J.E. Marsden, *Foundations of Mechanics*, Ed. ke-2, The Benjamin/Cummings Pub. Co. Inc., 1978.
2. Ahmad Faris bin Abdul Razak, Nilai aras tenaga atom hidrogen dalam 3-matra dan 2-matra menerusi persamaan Schroedinger dan aljabar kumpulan Lie. *Tesis Sarjana, Jabatan Matematik, Fakulti Sains Matematik, UKM* (1999). (tidak terbit)
3. A.P. Arya, *Introduction to Classical Mechanics*, Prentice-Hall, 1998.
4. A. Bohm, *Quantum Mechanics: Foundations and Applications*. Ed. ke-3, Springer-Verlag, 1993.
5. M. Carmeli dan S. Malin, *Representations of Rotations and Lorentz Groups: An Introduction*, Marcel Dekker Inc., 1976.
6. B.B. Dasgupta, Comments on Hydrogen atom in two dimensions, *Amer. J. Phys.* **49(2)** (1981), 189.
7. J.P. Elliot dan P.G. Dawber, *Symmetry in Physics: Principles and Simple Applications*, Jil. 1. John Wiley, 1979.
8. M.J. Englefield, *Group Theory and the Coulomb Problem*, Wiley-Interscince, 1972.
9. U. Fano dan A.R.P. Rao, *Symmetries in Quantum Physics*, Academic Press, 1996.
10. H. Goldstein, More on prehistory of Laplace or Runge-Lenz vector, *Amer. J. Phys.* **44(11)** (1975), 1123–1124.
11. H. Goldstein, *Classical Mechanics*. Ed. ke-2. Addison-Wesley, 1980.
12. G.Q. Hassoun, One-and two-dimensional hydrogen atoms, *Amer. J. Phys.* **49(2)** (1981), 143–146.
13. W.H. Heintz, Runge-Lenz vector for nonrelativistic Krepler motion modified by an inverse cube force, *Amer. J. Phys*. **44(7)** (1976), 687-694.
14. W. Heisenberg, *The Physical Principles of the Quantum Theory*, Dover Pub., 1949.
15. J.W.K. Huang dan A. Kozycki, Hydrogen atom in two dimensions, *Amer. J. Phys.* **47(11)** (1979), 1005–1005.
16. T. Inui, Y. Tanabe, dan Y. Onodera, *Group Theory and Its Applications in Physics*, Springer-Verlag, 1996.
17. H.F. Jones, *Groups, Representations and Physics*, IOP Pub. Ltd., 1990.
18. Karim b. Yaacob, The hydrogen atom and Bateman Functions, *Singapore J. Phys.* **5(1)** (1988), 77–93
19. D. Kleppner dan R.J. Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*, McGraw Hill, 1978.
20. J.B. Marion, *Classical Dnamics of Particles and Systems*, Acad. Press, 1970.
21. W.J. Miller, *Symmetry Groups and Their Applications*, Acad. Press, 1972.
22. N.F. Mott dan I.N. Sneddon, *Wave Mechanics and Its Applications*, Dover Pub. Cetakan pertamanya 1948 oleh Clarendon Press Oxford, 1963.
23. J.M. Normand, *A Lie Group: Rotations in Quantum Mechanics*, North-Holland, 1980.
24. L. Pauling dan E.B. Wilson, *Introduction to Quantum Mechanics with Applications to Chemistry*, McGraw Hill, 1935.
25. W. Thirring, *Classical Mathematical Physics: Dynamical Systems and Field Theories*, Ed. ke-3, Springer-Verlag, 1998.
26. H. Weyl, *Theory of Groups and Quantum Mechanics*, Dover Pub., 1931.
27. E.P. Wigner, *Group Theory and Its Application to the Quantum Mechanics of Atomic Spectra.* Academic Press, 1931. Diterbit semula 1959.