BULLETIN *of the*
MALAYSIAN MATHEMATICAL
SCIENCES SOCIETY
http://math.usm.my/bulletin

Bull. Malays. Math. Sci. Soc. (2) **28***(2) (2005), 191–204*

Lanjutan Satu Kaitan Koszul Mendatar Berbentuk Maurer-Cartan

TAHIR AHMAD
Jabatan Matematik, Fakulti Sains, Universiti Teknologi Malaysia
81310 Skudai, Johor, Malaysia
ta@mathsun.utm.my, Tahir_22@hotmail.com

Abstrak. Dalam makalah ini dipaparkan satu formulasi kaitan untuk berkas tangen unit sfera; $T(S^2)$. Kaitan ini dibina menggunakan sifat-sifat yang ada pada berkas tangen untuk S^2 serta operator pembezaan Lie dan dipersembahkan melalui sebuah teorem. Seterusnya, kaitan yang terhasil juga merupakan kaitan Koszul yang mendatar. Kaitan ini kemudiannya diitlakkan secara umum kepada sebarang berkas vektor (E, q, B) dan diikuti dengan beberapa sifat dari kaitan yang terbina dikaji dan dipersembahkan secara berperingkat melalui beberapa teorem. Diakhir makalah, lanjutan dari kaitan yang terbina memenuhi bentuk Maurer-Cartan diketengahkan.

2000 Mathematics Subject Classification: 53C07

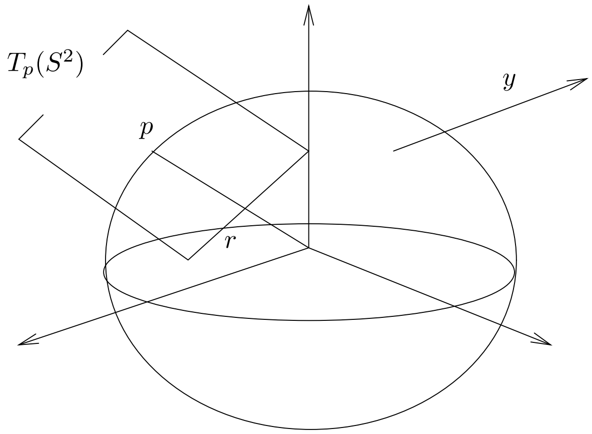
Katakunci: Manifold, berkas vektor, operator terbitan Lie, pemetaan kovarian, kaitan mendatar, bentuk Maurer-Cartan.

1. Pengenalan

Secara kasarnya, suatu vektor tangen X_p dalam R^n ialah pasangan tertib (X, p). Kita boleh gambarkan X sebagai vektor yang biasa dan p ialah titik asalannya. Koleksi semua vektor-vektor tangen pada $p \in R^n$ disebut ruang vektor pada titik p dan ditulis sebagai $T_p(R^n)$. Seterusnya, katalah U ialah suatu set terbuka dalam R^n, oleh demikian $T(U)$ ialah set yang mengandungi kesatuan semua vektor tangen pada semua $p \in U$; $T(U) = \bigcup_{p\in U} T_p(R^n)$. Seandainya $U = M$ dengan M merupakan suatu manifold, TM disebut berkas tangen [1, 2] bagi manifold M dan selalunya ditulis sebagai (TM, π, M) dengan π merupakan suatu unjuran. Sudah tentu di sini $X_p \in T_pM$ membawa maksud yang agak berlainan. Seterusnya, suatu medan vektor X dalam $U \in R^n$ ialah suatu fungsi yang boleh dibezakan (smooth function) dari U ke $T(U)$ manakala suatu kaitan (connection) merupakan terbitan arah (directional derivative) [3] yang diitlakkan, iaitu kadar perubahan suatu medan vektor pada arah medan vektor yang lain.

Dalam seksyen berikut, pembinaan bagi satu kaitan untuk berkas tangen unit sfera; $T(S^2)$ dipaparkan. Kebanyakan liputan menyeluruh pembinaan ini terkandung

Received: March 22, 2004; *Revised:* July 21, 2004.



Rajah 1. Medan vektor unit sfera

dalam [4]. Pembinaan ini kemudiannya diitlakkan secara umum kepada sebarang berkas vektor (E, q, B) [5] dengan beberapa sifat dari kaitan yang terbina dikaji dan dipersembahkan secara berperingkat dalam makalah ini. Diakhir makalah, lanjutan kaitan yang terbina memenuhi bentuk Maurer-Cartan diketengahkan.

2. Kaitan

Dalam seksyen ini, konsep yang dinyatakan dalam seksyen terdahulu akan dipertu-runkan secara formal dengan menggunakan pendekatan lengkungan.

Takrif 2.1. *Katalah (E, π, M) adalah berkas vektor. Suatu kaitan (connection) pada (E, π, M) ialah pemetaan kovarian $\nabla : X(M) \times X(M) \to X(M)$, i.e: $(x, \mu) \longmapsto \nabla_x(\mu)$ memenuhi syarat-syarat berikut [6]:*

(i) $\nabla_x(\mu)$ *ialah bilinear pada x dan μ*
(ii) $\nabla_{fx}(\mu) = f\nabla_x(\mu)$ *dengan $f \in C(M)$*
(iii) $\nabla_x(f\mu) = f\nabla_x(\mu) + L_x(f).\mu$

Lema dan Korolari berikut adalah penting bagi membuktikan teorem mengenai pembinaan kaitan bagi (TS^2, π, S^2).

Lema 2.1. *Sekiranya $v \in T_p(R^3)$, maka $\alpha(v) = v - (v \cdot r)r \in T_p(S^2)$.*

Bukti. Kita tahu bahawa r adalah vektor normal unit bagi S^2 (lihat Rajah 1). Oleh demikian,

$$\begin{aligned}\alpha(v) \cdot r &= [v - (v \cdot r)r] \cdot r \\ &= v \cdot r + (-v \cdot r)r \cdot r \\ &= v \cdot r + (-v \cdot r) = 0\end{aligned}$$

Lantas $\alpha(v) \perp r$ mengakibatkan $\alpha(v) \in \mathrm{T}_p(S^2)$. □

Korolari 2.1. *Sekiranya $y \in T_p(S^2)$, maka $\alpha(y) = y$.*

Bukti. Katalah $y \in \mathrm{T}_p(S^2)$, oleh demikian

$$\alpha(y) = y - (y \cdot r)r = y - 0r = y.$$

□

3. Kaitan (TS^2, π, S^2)

Sekarang perhatikan $T(S^2)$ merupakan suatu berkas vektor dengan S^2 merupakan manifold dasarnya. Kita akan takrifkan $\nabla_x(y)$ untuk $x, y \in X(S^2)$ seperti berikut. Pertimbangkan $y \in X(S^2)$ sebagai suatu pemetaan $y : S^2 \to R^3$. Lantaran itu $L_X(y) : S^2 \to R^3$ tertakrif. Bagi setiap $p \in S^2$ dan menggunakan Lema 2.1, wujud unjuran $\alpha : \mathrm{T}_p(R^3) \to \mathrm{T}_p(S^2)$ dengan $\alpha(v) = v - (v \cdot r)r$. Oleh demikian, sekarang kita sudah bersedia untuk membuktikan teorem berikut:

Teorem 3.1. $(\nabla_x(y))(r) = \alpha(L_x(y)(r))$ *ialah suatu kaitan untuk* (TS^2, π, S^2) *dengan* π *ialah unjuran yang biasa.*

Bukti. $(\nabla_x(y))(r) = \alpha(L_x(y)(r))$ mestilah memenuhi syarat-syarat yang tertera dalam Takrif 2.1.

Lihat,

(i)

$$\begin{aligned}\nabla_{x_1+x_2}(y) &= \alpha(L_{x_1+x_2}(y)) = \alpha(L_{x_1}(y) + L_{x_2}(y)) \\ &= \alpha(L_{x_1}(y)) + \alpha(L_{x_2}(y)) \\ &= \nabla_{x_1}(y) + \nabla_{x_2}(y),\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}\nabla_x(y_1 + y_2) &= \alpha(L_x(y_1 + y_2)) = \alpha(L_x(y_1) + L_x(y_2)) \\ &= \alpha(L_{x_1}(y_1)) + \alpha(L_{x_2}(y_2)) \\ &= \nabla_x(y_1) + \nabla_x(y_2),\end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned}\nabla_{fx}(y) &= \alpha(L_{fx}(y)) = \alpha(fL_x(y)) = f\alpha(L_x(y)) \\ &= f\nabla_x(y)\end{aligned}$$

(iv)

$$\begin{aligned}\nabla_x(fy) &= \alpha(L_x(fy)) = \alpha(L_x(f)y + fL_x(y)) \\ &\quad \text{menggunakan sifat linear bagi pembezaan Lie [6].} \\ &= \alpha(L_x(f)y) + \alpha(fL_x(y)) \\ &= L_x(f)\alpha(y) + f\alpha(L_x(y)) \\ &= L_x(f)y + f\nabla_x(y) \qquad \text{menggunakan Korolari 2.1} \\ &= f\nabla_x(y) + L_x(f)y\end{aligned}$$

□

Hasil berikut adalah remeh menggunakan takrifan Koszul terkandung dalam [7].

Korolari 3.1. $(\nabla_x(y))(r) = \alpha(L_x(y)(r))$ *juga merupakan kaitan Koszul untuk* (TS^2, π, S^2)

4. Kaitan mendatar

Kaitan mendatar ialah sejenis kaitan dengan kelengkungan (curvature) sifar. Dalam seksyen ini, kita akan membuktikan sebarang berkas vektor remeh [1] dengan kaitan Lie yang biasa adalah mendatar. Hasil pembuktian teorem yang umum ini akan menjurus kepada kaitan yang dibina dalam seksyen 3 juga merupakan suatu kaitan yang sama halnya.

Takrif 4.1. *Katakanlah* ∇ *ialah suatu kaitan bagi berkas vektor* (E, q, B). *Suatu kelengkungan* R_∇ *ialah pemetaan*

$$R_\nabla : X(B) \times X(B) \times \Gamma E \to \Gamma E$$

diberi sebagai

$$R_\nabla(x, y)(\mu) = \nabla_{[x,y]}(\mu) - [\nabla_x, \nabla_y](\mu) = \nabla_{[x,y]}(\mu) - \nabla_x(\nabla_y(\mu)) + \nabla_y(\nabla_x(\mu)) \text{ [6]}$$

Takrif 4.2. *Katakanlah* ∇ *ialah suatu kaitan bagi berkas vektor* (E, q, B). ∇ *dikatakan mendatar jika* $R_\nabla = 0$.

Sekarang, kita persembahkan satu hasil yang umum.

Teorem 4.1. $(\nabla_x(y))(r) = (L_x(y)(r))$ *adalah kaitan mendatar bagi sebarang berkas vektor yang remeh (trivial vector bundle);* $(M \times V, q, M)$.

Bukti.

$$\begin{aligned} & R_\nabla(x, y)(\mu) \\ &= \nabla_{[x,y]}(\mu) - [\nabla_x, \nabla_y](\mu) \\ &= L_{[x,y]}(\mu) - [L_x, L_y](\mu) \\ &= [L_x, L_y](\mu) - [L_x, L_y](\mu) \quad \text{menggunakan takrif kurungan Lie [2,6]} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Seterusnya Teorem 4.1 boleh diitlakkan kepada kaitan yang telah dibina untuk (TS^2, π, S^2). □

Korolari 4.1. $(\nabla_x(y))(r) = \alpha(L_x(y)(r))$ *merupakan kaitan Koszul mendatar untuk* (TS^2, π, S^2).

Bukti.

$$\begin{aligned} R_\nabla(x, y)(\mu) &= \nabla_{[x,y]}(\mu) - [\nabla_x, \nabla_y](\mu) \\ &= \alpha L_{[x,y]}(\mu) - [\alpha L_x, \alpha L_y](\mu) \\ &= [\alpha L_x, \alpha L_y](\mu) - [\alpha L_x, \alpha L_y](\mu) \text{ menggunakan takrif kurungan Lie [2, 6]} \\ &= [L_x, L_y](\mu) - [L_x, L_y](\mu) \text{ menggunakan Korolari 2.1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

□

5. Kaitan untuk (E, q, B)

Kaitan yang ingin dibina selanjutnya bagi (E, q, B) bergantung kepada carta [8] yang ditakrifkan untuk berkas vektornya.

Teorem 5.1. *Katalah (E, q, B) ialah sebarang berkas vektor. Biarkan $\psi : U \times V \to E_U$ sebarang fungsi/carta dengan $U \subset B$, maka $\nabla_x(\mu) = \psi(L_x(\psi^{-1}(\mu)))$ ialah suatu kaitan Koszul.*

Bukti. Katalah (E, q, B) ialah sebarang berkas vektor dan $\psi : U \times V \to E_U$ sebarang fungsi/carta dengan $U \subset B$, maka

(i)

$$\begin{aligned}
\nabla_x(\mu) &= \psi(L_x(\psi^{-1}(\mu))) \\
&= \psi\{L_{x_1}(\psi^{-1}(\mu)) + L_{x_2}(\psi^{-1}(\mu))\} && \text{disebabkan } L_x \text{ linear} \\
&= \psi\{L_{x_1}(\psi^{-1}(\mu))\} + \psi\{L_{x2}(\psi^{-1}(\mu))\} && \text{disebabkan } \psi \text{ linear} \\
&= \nabla_{x_1}(\mu) + \nabla_{x_2}(\mu),
\end{aligned}$$

(ii)

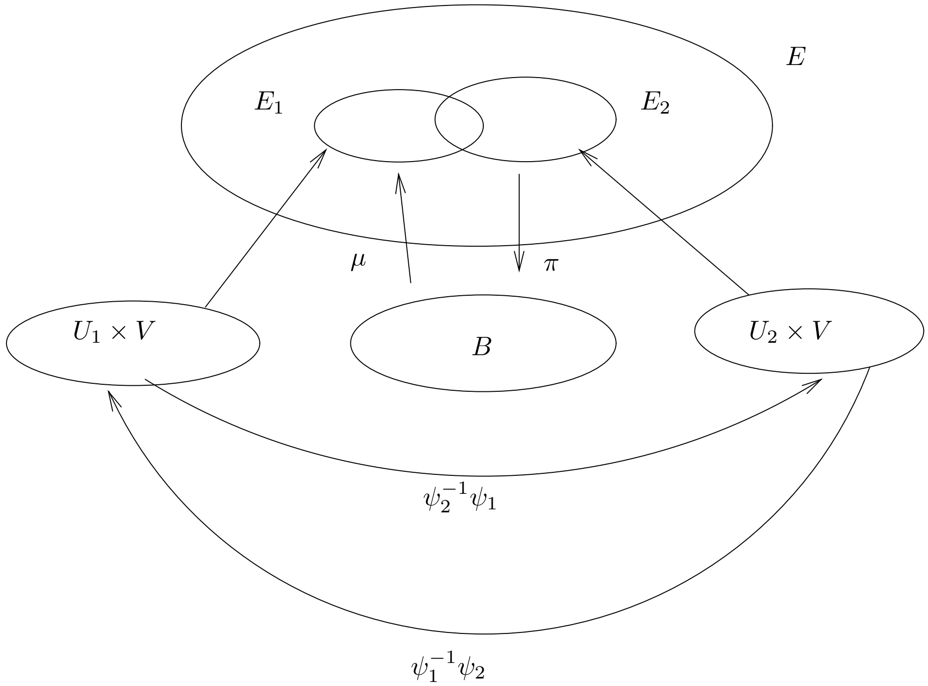
$$\begin{aligned}
\nabla_x(\mu_1 + \mu_2) &= \psi(L_x(\psi^{-1}(\mu_1 + \mu_2))) \\
&= \psi(L_x\{\psi^{-1}(\mu_1) + \psi^{-1}(\mu_2)\}) && \text{disebabkan } \psi^{-1} \text{ linear} \\
&= \psi\{L_x(\psi^{-1}(\mu_1)) + L_x(\psi^{-1}(\mu_2))\} && \text{disebabkan } L_x \text{ linear} \\
&= \psi(L_x(\psi^{-1}(\mu_1))) + \psi(L_x(\psi^{-1}(\mu_2)) && \text{disebabkan } \psi \text{ linear} \\
&= \nabla_x(\mu_1) + \nabla_x(\mu_2),
\end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned}
\nabla_{fx}(\mu) &= \psi(L_{fx}(\psi^{-1}(\mu))) \\
&= \psi(fL_x(\psi^{-1}(\mu)) \\
&= f\psi(L_x(\psi^{-1}(\mu)),
\end{aligned}$$

(iv)

$$\begin{aligned}
\nabla_x(f\mu) &= \psi(L_x(\psi^{-1}(f\mu))) \\
&= \psi(L_x(f\psi^{-1}(\mu)) \\
&= \psi(L_x(f)(\psi^{-1}(\mu)) + fL_x(\psi^{-1}(\mu))) \\
&= \psi L_x(f)(\psi^{-1}(\mu)) + \psi fL_x(\psi^{-1}(\mu)) \\
&= \psi fL_x(\psi^{-1}(\mu)) + \psi L_x(f)(\psi^{-1}(\mu)) \\
&= f\psi L_x(\psi^{-1}(\mu)) + L_x(f)\psi(\psi^{-1}(\mu)) \\
&= f\psi L_x(\psi^{-1}(\mu)) + L_x(f)(\mu) \\
&= f\nabla_x(\mu) + L_x(f)(\mu).
\end{aligned}$$



Rajah 2. Pengangkutan di antara dua carta

Berpandukan Rajah 2 dengan carta-carta $\psi_1 : U_1 \times V \to E_{U_1}$ dan $\psi_2 : U_2 \times V \to E_{U_2}$ bagi satu berkas vektor E, situasi apakah yang perlu dipenuhi supaya $\nabla^1 = \nabla^2$? Menggunakan Teorem 3.1, $\nabla_x^1(\mu) = \psi_1(L_x(\psi_1^{-1}(\mu)))$ dan $\nabla_x^2(\mu) = \psi_2(L_x(\psi_2^{-1}(\mu)))$ merupakan kaitan Koszul bagi U_1 dan U_2 dengan:

$$L_x(\psi_1^{-1}(\mu)) : U_1 \to U_1 \times V \text{ dan } L_x(\psi_2^{-1}(\mu)) : U_2 \to U_2 \times V.$$

□

Oleh demikian ia akan hanya berlaku apabila $\psi_1(L_x(\psi_1^{-1}(\mu)) = \psi_2(L_x(\psi_2^{-1}(\mu))$ yakni sekiranya $\psi_2^{-1} \circ \psi_1(L_x(\psi_1^{-1}(\mu)) = L_x(\psi_2^{-1}(\mu)$. Penyiasatan awal ke arah pembinaan hubungan yang diinginkan membuahkan dua teorem (Teorem 5.2 dan Teorem 5.3) dan satu korolari (Korolari 5.1) yang dialih gambarkan dari pengangkutan di antara dua carta kepada isomorfisma di antara dua berkas vektor dengan manifold dasar yang sama (Rajah 3), diikuti dengan Teorem 5.4 dan Korolari 5.2 memberi penjelasan tentang kelinearan kelengkungannya. Lanjutan pembinaan kaitan itu dipaparkan melalui Teorem 5.5 dan Korolari 5.3 dan hubungannya dengan Bentuk Maurer-Cartan dipersembahkan melalui Teorem 5.6. Perincian teorem-teorem yang dimaksudkan berserta pembuktiaanya diperturunkan seperti berikut.

$$
\begin{tikzcd}
E_1 \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "q_1"'] & E_2 \arrow[d, "q_2"] \\
M \arrow[r, "id"'] & M
\end{tikzcd}
$$

Rajah 3. Berkas vektor dengan manifold dasar yang sama

Teorem 5.2. *Katalah (E_1, q_1, M) dan (E_2, q_2, M) adalah berkas vektor dengan isomorfisma $\gamma : E_1 \to E_2$. Sekiranya ∇^2 adalah kaitan bagi E_2, maka $\nabla^1_x(\mu) = \gamma^{-1}(\nabla^2_x(\gamma \circ \mu))$ merupakan kaitan bagi E_1.*

Bukti. Katalah ∇^2 adalah kaitan bagi E_2. Oleh demikian $\nabla^1_x(\mu) = \gamma^{-1}(\nabla^2_x(\gamma \circ \mu))$ merupakan kaitan bagi E_1 kerana:

(i)

$$
\begin{aligned}
\nabla^1_{x_1+x_2}(\mu) &= \gamma^{-1}(\nabla^2_{x_1+x_2}(\gamma(\mu))) \\
&= \gamma^{-1}(\nabla^2_{x_1}(\gamma(\mu)) + \nabla^2_{x_2}(\gamma(\mu))) && \text{disebabkan } \nabla^2 \text{ linear} \\
&= \gamma^{-1}(\nabla^2_{x_1}(\gamma(\mu))) + \gamma^{-1}(\nabla^2_{x_2}(\gamma(\mu))) && \text{disebabkan } \gamma^{-1} \text{ linear} \\
&= \nabla^2_{x_1}(\mu) + \nabla^2_{x_2}(\mu),
\end{aligned}
$$

(ii)

$$
\begin{aligned}
\nabla^1_x(\mu_1 + \mu_2) &= \gamma^{-1}(\nabla^2_x(\gamma(\mu_1 + \mu_2))) \\
&= \gamma^{-1}(\nabla^2_x \gamma(\mu_1) + \gamma(\mu_2)) && \text{disebabkan } \gamma \text{ linear} \\
&= \gamma^{-1}(\nabla^2_x(\gamma(\mu_1)) + \nabla^2_x(\gamma(\mu_2))) && \text{disebabkan } \nabla^2_x \text{ linear} \\
&= \gamma^{-1}(\nabla^2_x(\gamma(\mu_1))) + \gamma^{-1}(\nabla^2_x(\gamma(\mu_2))) && \text{disebabkan } \gamma^{-1} \text{ linear} \\
&= \nabla^2_x(\mu_1) + \nabla^2_x(\mu_2),
\end{aligned}
$$

(iii)

$$
\begin{aligned}
\nabla^1_{fx}(\mu) &= \gamma^{-1}(\nabla^2_{fx}(\gamma(\mu))) \\
&= \gamma^{-1}(f\nabla^2_x(\gamma(\mu))) \\
&= f\gamma^{-1}(\nabla^2_x(\gamma(\mu))) \\
&= f\nabla^1_x(\mu),
\end{aligned}
$$

(iv)

$$\begin{aligned}
\nabla^1_x(f\mu) &= \gamma^{-1}(\nabla^2_x(\gamma(f\mu))) \\
&= \gamma^{-1}(\nabla^2_x(f\gamma(\mu))) \\
&= \gamma^{-1}(f\nabla^2_x(\gamma(\mu)) + Lx(f)(\gamma(\mu))) \\
&= \gamma^{-1}(f\nabla^2_x(\gamma(\mu))) + \gamma^{-1}(Lx(f)(\gamma(\mu))) \\
&= f\gamma^{-1}(\nabla^2_x(\gamma(\mu)) + Lx(f)\gamma^{-1}(\gamma(\mu))) \\
&= f\gamma^{-1}(\nabla^2_x(\gamma(\mu)) + Lx(f)(\mu)) \\
&= f\nabla^1_x(\mu) + L_x(f)\mu.
\end{aligned}$$

□

Teorem 5.3. *Katalah (E_1, q_1, M) dan (E_2, q_2, M) adalah berkas vektor dengan isomorfisma $\gamma : E_1 \to E_2$. Sekiranya ∇^2 adalah kaitan bagi E_2 dan $\nabla^1_x(\mu) = \gamma^{-1}(\nabla^2_x(\gamma \circ \mu))$ merupakan kaitan bagi E_1, maka*

$$R_{\nabla^1}(x, y)(\mu) = \gamma^{-1} \circ R_{\nabla^2}(x, y)(\gamma \circ \mu).$$

Bukti. Andaikan (E_1, q_1, M) dan (E_2, q_2, M) adalah berkas vektor dengan isomorfisma $\gamma : E_1 \to E_2$ manakala ∇^2 adalah kaitan bagi E_2 dan $\nabla^1_x(\mu) = \gamma^{-1}(\nabla^2_x(\gamma \circ \mu))$ bagi E_1 pula. Kita akan membuktikan

$$R_{\nabla^1}(x, y)(\mu) = \gamma^{-1} \circ R_{\nabla^2}(x, y)(\gamma \circ \mu)$$

dengan cara menunjukkan ungkapan di sebelah kiri adalah sama dengan ungkapan di sebelah kanan.

Sebelah kiri:

$$\begin{aligned}
R_{\nabla^1}(x, y)(\mu) &= \nabla^1_{[x,y]}(\mu) - [\nabla^1_x, \nabla^1_y](\mu) \\
&= \nabla^1_{[x,y]}(\mu) - \nabla^1_x(\nabla^1_y(\mu)) + \nabla^1_y(\nabla^1_x(\mu))
\end{aligned}$$

Sebelah kanan:

$$\begin{aligned}
&\gamma^{-1} \circ R_{\nabla^2}(x, y)(\gamma \circ \mu) \\
&= \gamma^{-1}\left(\nabla^2_{[x,y]}(\gamma \circ \mu) - \nabla^2_x(\nabla^2_y(\gamma \circ \mu)) + \nabla^2_y(\nabla^2_x(\gamma \circ \mu))\right) \\
&= \gamma^{-1} \circ \nabla^2_{[x,y]}(\gamma \circ \mu) - \gamma^{-1} \circ \nabla^2_x(\nabla^2_y(\gamma \circ \mu)) + \gamma^{-1} \circ \nabla^2_y(\nabla^2_x(\gamma \circ \mu)) \\
&\quad \text{disebabkan } \nabla^1(\mu) = \gamma^{-1}(\nabla^2(\gamma \circ \mu)) \text{ dari andaian, maka} \\
&= \nabla^1_{[x,y]}(\mu) - \gamma^{-1} \circ \nabla^2_x(\gamma \circ \nabla^1_y(\mu)) + \gamma^{-1} \circ \nabla^2_y(\gamma \circ \nabla^1_x(\mu)) \\
&\quad \text{dengan hujah yang sama,} \\
&= \nabla^1_{[x,y]}(\mu) - \nabla^1_x(\nabla^1_y(\mu)) + \nabla^1_y(\nabla^1_x(\mu)).
\end{aligned}$$

□

Korolari 5.1. *Katalah (E_1, q_1, M) dan (E_2, q_2, M) adalah berkas vektor dengan isomorfisma $\gamma : E_1 \to E_2$. Sekiranya ∇^2 adalah kaitan mendatar bagi E_2 dan $\nabla^1_x(\mu) = \gamma^{-1}(\nabla^2_x(\gamma \circ \mu))$ merupakan kaitan bagi E_1 serta $R_{\nabla^1}(x, y)(\mu) = \gamma^{-1} \circ R_{\nabla^2}(x, y)(\mu)$, maka ∇^1 merupakan kaitan mendatar.*

Bukti. Andaikan (E_1, q_1, M) dan (E_2, q_2, M) adalah berkas vektor dengan isomorfisma $\gamma : E_1 \to E_2$ manakala ∇^2 adalah kaitan mendatar bagi E_2 dan $\nabla^1_x(\mu) = \gamma^{-1}(\nabla^2_x(\gamma \circ \mu))$ bagi E_1 dengan $R_{\nabla^1}(x,y)(\mu) = \gamma^{-1} \circ R_{\nabla^2}(x,y)(\gamma \circ \mu)$. Oleh demikian, $R_{\nabla^1}(x,y)(\mu) = \gamma^{-1} \circ R_{\nabla^2}(x,y)(\gamma \circ \mu) = \gamma^{-1}(0)$ disebabkan ∇^2 adalah kaitan $= 0$. Justeru, ∇^1 merupakan kaitan mendatar. □

Teorem 5.4. *$R_{\nabla^2}(x,y)(\gamma \circ \mu)$ ialah f-linear pada x, y dan μ.*

Bukti.

(i)

$$\begin{aligned}
R_{\nabla^2}(fx,y)(\gamma \circ \mu) &= \nabla^2_{[fx,y]}(\gamma \circ \mu) - \nabla^2_{fx}(\nabla^2_y(\gamma \circ \mu)) + \nabla^2_y(\nabla^2_{fx}(\gamma \circ \mu)) \\
&= \nabla^2_{[fx,y]}(\gamma \circ \mu) - f\nabla^2_x(\nabla^2_y(\gamma \circ \mu)) + \nabla^2_y(f\nabla^2_x(\gamma \circ \mu)) \\
&= \nabla^2_{[fx,y]}(\gamma \circ \mu) - f\nabla^2_x(\nabla^2_y(\gamma \circ \mu)) + f\nabla^2_y(\nabla^2_x(\gamma \circ \mu)) \\
&\quad + L_y(f)\nabla^2_x(\gamma \circ \mu)
\end{aligned}$$

menggunakan Takrif 2.1. Walaubagaimanapun lihat,

$$\begin{aligned}
[fx,y](g) &= (fx)(y(g)) - y(fx(g)) \\
&= fx(y(g)) - (y(f)x(g) + fy(x(g))) \\
&= fx(y(g)) - y(f)x(g) - fy(x(g)) \\
&= fx(y(g)) - fy(x(g)) - y(f)x(g) \\
&= f(xy - yx)(g) - y(f)x(g) \\
&= (f[x,y] - y(f)x)(g)
\end{aligned}$$

Lantaran itu,

$$\begin{aligned}
R_{\nabla^2}(fx,y)(\gamma \circ \mu) &= \nabla^2_{[fx,y]}(\gamma \circ \mu) - f\nabla^2_x(\nabla^2_y(\gamma \circ \mu)) \\
&\quad + f\nabla^2_y(\nabla^2_x(\gamma \circ \mu)) + L_y(f)\nabla^2_x(\gamma \circ \mu) \\
&= \nabla^2_{f[x,y]-y(f)x}(\gamma \circ \mu) - f\nabla^2_x(\nabla^2_y(\gamma \circ \mu)) \\
&\quad + f\nabla^2_y(\nabla^2_x(\gamma \circ \mu)) + L_y(f)\nabla^2_x(\gamma \circ \mu) \\
&= \nabla^2_{f[x,y]}(\gamma \circ \mu) - \nabla^2_{y(f)x}(\gamma \circ \mu) - f\nabla^2_x(\nabla^2_y(\gamma \circ \mu)) \\
&\quad + f\nabla^2_y(\nabla^2_x(\gamma \circ \mu)) + L_y(f)\nabla^2_x(\gamma \circ \mu) \\
&= f\nabla^2_{[x,y]}(\gamma \circ \mu) - y(f)\nabla^2_x(\gamma \circ \mu) - f\nabla^2_x(\nabla^2_y(\gamma \circ \mu)) \\
&\quad + f\nabla^2_y(\nabla^2_x(\gamma \circ \mu)) + L_y(f)\nabla^2_x(\gamma \circ \mu) \\
&= f\nabla^2_{[x,y]}(\gamma \circ \mu) - L_y(f)\nabla^2_x(\gamma \circ \mu) - f\nabla^2_x(\nabla^2_y(\gamma \circ \mu)) \\
&\quad + f\nabla^2_y(\nabla^2_x(\gamma \circ \mu)) + L_y(f)\nabla^2_x(\gamma \circ \mu) \\
&= f\nabla^2_{[x,y]}(\gamma \circ \mu) - f\nabla^2_x(\nabla^2_y(\gamma \circ \mu)) + f\nabla^2_y(\nabla^2_x(\gamma \circ \mu)) \\
&= f(\nabla^2_{[x,y]}(\gamma \circ \mu) - \nabla^2_x(\nabla^2_y(\gamma \circ \mu)) + \nabla^2_y(\nabla^2_x(\gamma \circ \mu))) \\
&= fR_{\nabla^2}(x,y)(\gamma \circ \mu)
\end{aligned}$$

Oleh demikian f linear pada x.

(ii)

$$\begin{aligned}
R_{\nabla^2}(x, fy)(\gamma \circ \mu) &= \nabla^2_{[x,fy]}(\gamma \circ \mu) - \nabla^2_x(\nabla^2_{fy}(\gamma \circ \mu)) + \nabla^2_{fy}(\nabla^2_x(\gamma \circ \mu)) \\
&= \nabla^2_{[x,fy]}(\gamma \circ \mu) - \nabla^2_x(f\nabla^2_y(\gamma \circ \mu)) + f\nabla^2_y(\nabla^2_x(\gamma \circ \mu)) \\
&= \nabla^2_{[x,fy]}(\gamma \circ \mu) - f\nabla^2_x(\nabla^2_y(\gamma \circ \mu)) \\
&\quad + L_x(f)\nabla^2_y(\gamma \circ \mu) + f\nabla^2_y(\nabla^2_x(\gamma \circ \mu)) \\
&= \nabla^2_{[x,fy]}(\gamma \circ \mu) - f\nabla^2_x(\nabla^2_y(\gamma \circ \mu)) \\
&\quad - L_x(f)\nabla^2_y(\gamma \circ \mu) + f\nabla^2_y(\nabla^2_x(\gamma \circ \mu))
\end{aligned}$$

Walaubagaimanapun lihat,

$$\begin{aligned}
[x, fy]\,(g) &= (x)(fy(g)) - fy(x(g)) \\
&= x(f)y(g) + fx(y(g)) - fy(x(g)) \\
&= x(f)y(g) + f[xy - yx](g) \\
&= (x(f)y + f[x, y])(g)
\end{aligned}$$

Lantaran itu,

$$\begin{aligned}
&R_{\nabla^2}(x, fy)(\gamma \circ \mu) \\
&= \nabla^2_{[x,fy]}(\gamma \circ \mu) - f\nabla^2_x(\nabla^2_y(\gamma \circ \mu)) \\
&\qquad - L_x(f)\nabla^2_y(\gamma \circ \mu) + f\nabla^2_y(\nabla^2_x(\gamma \circ \mu)) \\
&= \nabla^2_{x(f)y+f[x,y]}(\gamma \circ \mu) - f\nabla^2_x(\nabla^2_y(\gamma \circ \mu)) \\
&\qquad - L_x(f)\nabla^2_y(\gamma \circ \mu) + f\nabla^2_y(\nabla^2_x(\gamma \circ \mu)) \\
&= \nabla^2_{x(f)y}(\gamma \circ \mu) + \nabla^2_{f[x,y]}(\gamma \circ \mu) - f\nabla^2_x(\nabla^2_y(\gamma \circ \mu)) - L_x(f)\nabla^2_y(\gamma \circ \mu) \\
&+ f\nabla^2_y(\nabla^2_x(\gamma \circ \mu)) \\
&= x(f)\nabla^2_y(\gamma \circ \mu) + f\nabla^2_{[x,y]}(\gamma \circ \mu) - f\nabla^2_x(\nabla^2_y(\gamma \circ \mu)) - L_x(f)\nabla^2_y(\gamma \circ \mu) \\
&+ f\nabla^2_y(\nabla^2_x(\gamma \circ \mu)) \\
&= L_x(f)\nabla^2_y(\gamma \circ \mu) + f\nabla^2_{[x,y]}(\gamma \circ \mu) - f\nabla^2_x(\nabla^2_y(\gamma \circ \mu)) - L_x(f)\nabla^2_y(\gamma \circ \mu) \\
&+ f\nabla^2_y(\nabla^2_x(\gamma \circ \mu)) \\
&= f\nabla^2_{[x,y]}(\gamma \circ \mu) - f\nabla^2_x(\nabla^2_y(\gamma \circ \mu)) + f\nabla^2_y(\nabla^2_x(\gamma \circ \mu)) \\
&= f(\nabla^2_{[x,y]}(\gamma \circ \mu) - \nabla^2_x(\nabla^2_y(\gamma \circ \mu)) + \nabla^2_y(\nabla^2_x(\gamma \circ \mu))) \\
&= fR_{\nabla^2}(x, y)(\gamma \circ \mu)
\end{aligned}$$

Oleh demikian f linear pada y.

(iii)

$$\begin{aligned}&R_{\nabla^2}(x,y)(\gamma\circ f\mu)\\&=\nabla^2_{[x,y]}(\gamma\circ f\mu)-\nabla^2_x(\nabla^2_y(\gamma\circ f\mu))+\nabla^2_y(\nabla^2_x(\gamma\circ f\mu))\end{aligned}$$

Walaubagaimanapun lihat,

$$\begin{aligned}\nabla^2_{[x,y]}(\gamma\circ f\mu)&=\nabla^2_{[x,y]}(f(\gamma\circ\mu))\\&=f\nabla^2_{[x,y]}(\gamma\circ\mu)+L_{[x,y]}(f)(\gamma\circ\mu)\end{aligned}$$

sementara,

$$\begin{aligned}\nabla^2_x(\nabla^2_y(\gamma\circ f\mu))&=\nabla^2_x(\nabla^2_y(f(\gamma\circ\mu)))\\&=\nabla^2_x f\nabla^2_y(\gamma\circ\mu)+L_y(f)(\gamma\circ\mu)\\&=\nabla^2_x(f\nabla^2_y(\gamma\circ\mu))+\nabla^2_x(L_y(f)(\gamma\circ\mu))\\&=f\nabla^2_x(\nabla^2_y(\gamma\circ\mu))+L_x(f)\nabla^2_y(\gamma\circ\mu)\\&\quad+L_y(f)\nabla^2_x(\gamma\circ\mu)+L_xL_y(f)(\gamma\circ\mu)\end{aligned}$$

manakala,

$$\begin{aligned}\nabla^2_y(\nabla^2_x(\gamma\circ f\mu))&=\nabla^2_y(\nabla^2_x(f(\gamma\circ\mu)))\\&=\nabla^2_y(f\nabla^2_x(\gamma\circ\mu)+L_x(f)(\gamma\circ\mu))\\&=\nabla^2_y(f\nabla^2_x(\gamma\circ\mu))+\nabla^2_y(L_x(f)(\gamma\circ\mu))\\&=f\nabla^2_y(\nabla^2_x(\gamma\circ\mu))+L_y(f)\nabla^2_x(\gamma\circ\mu)\\&\quad+L_x(f)\nabla^2_y(\gamma\circ\mu)+L_yL_x(f)(\gamma\circ\mu)\end{aligned}$$

Lantaran itu,

$$\begin{aligned}&R_{\nabla^2}(x,y)(\gamma\circ f\mu)=\nabla^2_{[x,y]}(\gamma\circ f\mu)-\nabla^2_x(\nabla^2_y(\gamma\circ f\mu))+\nabla^2_y(\nabla^2_x(\gamma\circ f\mu))\\&=f\nabla^2_{[x,y]}(\gamma\circ\mu)+L_{[x,y]}(f)(\gamma\circ\mu)\\&-(f\nabla^2_x(\nabla^2_y(\gamma\circ\mu))+L_x(f)\nabla^2_y(\gamma\circ\mu)+L_y(f)\nabla^2_x(\gamma\circ\mu)+L_xL_y(f)(\gamma\circ\mu))\\&+f\nabla^2_y(\nabla^2_x(\gamma\circ\mu))+L_y(f)\nabla^2_x(\gamma\circ\mu)+L_x(f)\nabla^2_y(\gamma\circ\mu)+L_yL_x(f)(\gamma\circ\mu)\\&=f\nabla^2_{[x,y]}(\gamma\circ\mu)+L_{[x,y]}(f)(\gamma\circ\mu)-f\nabla^2_x(\nabla^2_y(\gamma\circ\mu))\\&-L_xL_y(f)(\gamma\circ\mu)+f\nabla^2_y(\nabla^2_x(\gamma\circ\mu))+L_yL_x(f)(\gamma\circ\mu).\end{aligned}$$

Tetapi,

$$L_{[x,y]}f-[L_x,L_y](f)=0.$$

Oleh demikian,

$$\begin{aligned} R_{\nabla^2}(x,y)(\gamma\circ f\mu) &= f\nabla^2_{[x,y]}(\gamma\circ\mu) - f\nabla^2_x(\nabla^2_y(\gamma\circ\mu)) + f\nabla^2_y(\nabla^2_x(\gamma\circ\mu)) \\ &= f(\nabla^2_{[x,y]}(\gamma\circ\mu) - \nabla^2_x(\nabla^2_y(\gamma\circ\mu)) + \nabla^2_y(\nabla^2_x(\gamma\circ\mu))) \\ &= fR_{\nabla^2}(x,y)(\gamma\circ\mu) \end{aligned}$$

lantas f linear pada μ.
Seterusnya, dengan membiarkan

$$R_{\nabla^1}(x,y)(\mu) = \gamma^{-1}\circ R_{\nabla^2}(x,y)(\gamma\circ\mu),$$

kita akan memperolehi korolori berikut. □

Korolari 5.2. *$R_{\nabla^1}(x,y)(\mu)$ ialah f-linear pada x,y dan μ.*

Teorem 5.5. *Jika ∇ ialah kaitan pada E dan $D: TM \to End(E)$ ialah suatu pemetaan berkas vektor, maka $\nabla'_x(\mu) = \nabla_x(\mu) + D(x)(\mu)$ ialah suatu kaitan.*

Bukti.

(i)

$$\begin{aligned} \nabla'_{x_1+x_2}(\mu) &= \nabla_{x_1+x_2}(\mu) + D(x_1+x_2)(\mu) \\ &= \nabla_{x_1}(\mu) + \nabla_{x_2}(\mu) + D(x_1)(\mu) + D(x_2)(\mu) \\ &= \nabla_{x_1}(\mu) + D(x_1)(\mu) + \nabla_{x_2}(\mu) + D(x_2)(\mu) \\ &= \nabla'_{x_1}(\mu) + \nabla'_{x_2}(\mu), \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} \nabla'_{fx}(\mu) &= \nabla_{fx}(\mu) + D(fx)(\mu) \\ &= f\nabla_x(\mu) + fD(x)(\mu) \\ &= f\left[\nabla_x(\mu) + D(x)(\mu)\right] \\ &= f\nabla'_x(\mu), \end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned} \nabla'_x(\mu_1+\mu_2) &= \nabla_x(\mu_1+\mu_2) + D(x)(\mu_1+\mu_2) \\ &= \nabla_x(\mu_1) + \nabla_x(\mu_2) + D(x)(\mu_1) + D(x)(\mu_2) \\ &= \nabla_x(\mu_1) + D(x)(\mu_1) + \nabla_x(\mu_2) + D(x)(\mu_2) \\ &= \nabla'_x(\mu_1) + \nabla'_x(\mu_2), \end{aligned}$$

(iv)

$$\begin{aligned} \nabla'_x(f\mu) &= \nabla_x(f\mu) + D(x)(f\mu) \\ &= f\nabla_x(\mu) + L_x(f)\mu + fD(x)(\mu) \\ &= f\left[\nabla_x(\mu) + D(x)(\mu)\right] + L_x(f)\mu \\ &= f\nabla'_x(\mu) + L_x(f)\mu \end{aligned}$$

Oleh demikian, $\nabla'_x(\mu)$ ialah kaitan Koszul. Seterusnya, menggunakan korolari 2.1 kedalam teorem 3.1, kemudian dipadankan ke dalam teorem 5.5 di atas, maka kita akan perolehi korolari berikut. □

Korolari 5.3. $\nabla'_x(\mu) = L_x(\mu) + D(x)(\mu)$ *merupakan suatu kaitan.*

Kita tahu $L_x(\mu)$ adalah kaitan mendatar dari teorem 4.1 dan seandainya $\nabla'_x(\mu)$ adalah kaitan mendatar bagi $U_{ij} \times V$ dengan $U_{ij} = U_i \cap U_j$. Kita boleh mempertimbangkan $D : X(U_{ij}) \times \Gamma(U_{ij} \times V) \to \Gamma(U_{ij} \times V)$ dengan $X(U_{ij})$ ialah medan vektor bagi U_{ij}, $\Gamma(U_{ij} \times V)$ ialah set semua seksyen (unjuran) bagi berkas vektor remeh $(U_{ij} \times V, \pi, U_{ij})$ dan $D_x(\mu) = \nabla'_x(\mu) - L_x(\mu)$. Dengan perkataan lain, kita boleh gambarkannya seperti berikut;

$$D : T(U_{ij}) \to End(U_{ij} \times V) = U_{ij} \times gl(V) = U_{ij} \times \mathbf{g},$$

dengan

$$D_x : U_{ij} \to U_{ij} \times \mathbf{g} \text{ ataupun } D_x : U_{ij} \to \mathbf{g}.$$

Menggunakan Teorem 4.1 dan Korolari 5.3, maka teorem yang penting berikut yang menghubungkan kaitan yang dibina pada awal makalah ini dengan bentuk Maurer-Cartan [7, 9, 10] dapat dijana dan dibuktikan.

Teorem 5.6. *Seandainya ∇ ialah kaitan mendatar pada $M \times V$ dengan $\nabla'_x(\mu) = L_x(\mu) + D_x(\mu)$, maka $D : TM \to M \times End(V)$ pasti berbentuk Maurer-Cartan.*

Bukti.

$$\begin{aligned}
0 &= R_\nabla(x,y)(\mu) = \nabla_{[x,y]}(\mu) - [\nabla_x, \nabla_y](\mu) \text{ dari andaian } \nabla \text{ ialah kaitan mendatar}\\
&= L_{[x,y]}(\mu) + D_{[x,y]}(\mu) - \nabla_x(\nabla_y(\mu)) + \nabla_y(\nabla_x(\mu))\\
&= L_{[x,y]}(\mu) + D_{[x,y]}(\mu) - \nabla_x(L_y(\mu) + D_y(\mu)) + \nabla_y(L_x(\mu) + D_x(\mu))\\
&= L_{[x,y]}(\mu) + D_{[x,y]}(\mu) - \nabla_x(L_y(\mu)) - \nabla_x(D_y(\mu)) + \nabla_y(L_x(\mu)) + \nabla_y(D_x(\mu))\\
&= L_{[x,y]}(\mu) + D_{[x,y]}(\mu) - [L_x(L_y(\mu)) + D_x(L_y(\mu))] - [L_x(D_y(\mu)) + D_x(D_y(\mu))]\\
&+ [L_y(L_x(\mu)) + D_y(L_x(\mu))] + [L_y(D_x(\mu)) + D_y(D_x(\mu))]\\
&\text{menggunakan penakrifan kaitan yang tersurat}\\
&= D_{[x,y]}(\mu) - D_x(L_y(\mu)) - [L_x(D_y(\mu)) + D_x(D_y(\mu))]\\
&+ D_y(L_x(\mu)) + [L_y(D_x(\mu)) + D_y(D_x(\mu))]
\end{aligned}$$

disebabkan

$$\begin{aligned}
&L_{[x,y]}(\mu) = L_x(L_y(\mu)) - L_y(L_x(\mu))\\
&= D_{[x,y]}(\mu) - D_x(L_y(\mu)) + L_y(D_x(\mu)) - L_x(D_y(\mu)) + D_y(L_x(\mu))\\
&- D_x(D_y(\mu)) + D_y(D_x(\mu)).
\end{aligned}$$

Sekarang lihat, jika $\varphi : M \to End(V)$ atau dengan perkataan lain $\varphi : M \times V \to M \times V$, maka

$$L_x(\varphi)(\mu) = L_x(\varphi(\mu)) - \varphi L_x(\mu).$$

Lantaran itu terbitan akan menjadi seperti berikut,

$$\begin{aligned}
&= D_{[x,y]}(\mu) + L_y(D_x)(\mu) - L_x(D_y)(\mu) - [D_x, D_y](\mu) \\
&= -(L_x(D_y)(\mu) - L_y(D_x)(\mu) - D_{[x,y]}(\mu) + [D_x, D_y](\mu)) \\
&= -(x(D_y)(\mu) - y(D_x)(\mu) - D_{[x,y]}(\mu) + [D_x, D_y](\mu)) \\
&= -(dD(x,y)(\mu) + [D_x, D_y](\mu))
\end{aligned}$$

dengan d ialah terbitan peluaran [6] pada M.
Dengan perkataan lain, $dD + [D, D] = 0$, yakni $D : TM \to M \times End(V)$ berbentuk Maurer-Cartan.

□

6. Rumusan

Makalah ini dimulakan dengan pembinaan kaitan koszul mendatar untuk berkas tangen unit sfera; $T(S^2)$. Kaitan ini kemudiannya diitlakkan secara umum kepada sebarang berkas vektor (E, q, B). Beberapa sifat dari kaitan yang terbina dipersembahkan secara berperingkat melalui beberapa teorem. Akhirnya lanjutan kaitan yang terbina dibuktikan memenuhi bentuk Maurer-Cartan.

Rujukan

[1] T. Ahmad, Vektor berkas trirangkap, *Pros. Simp. Keb. Sains Matematik ke-7,* Shah Alam, Selangor, 3-5 Dis. 1996, 319–325.

[2] K. Konieczna and P. Urbański, Double vector bundles and duality, *Arch. Math. (Brno)* **35**(1) (1999), 59–95.

[3] B. O'Neill, *Elementary Differential Geometry*, Academic Press, New York, 1966.

[4] T. Ahmad, Satu kaitan Koszul mendatar untuk berkas tangen unit sfera (TS^2, π, S^2), *Matematika* **16**(1) (2000), 41–46.

[5] T. Ahmad, Pengitlakan satu kaitan Koszul mendatar (TS^2, π, S^2) kepada (E, q, B), *Matematika* **16**(2) (2000), 95–100.

[6] R. Abraham and J. E. Marsden, *Foundations of Mechanics*, Second edition, Benjamin/Cummings, Reading, Mass., 1985.

[7] G. Lugo, *Notes On Differential Geometry in Physics*, Department of Mathematical Sciences, Univ. North Carolina, March 1998, 1–56.

[8] T. Ahmad, Permukaan Riemann: S^2, *Matematika* **19**(1) (1993), 9–17.

[9] F. E. Burstall, Harmonic tori in Lie groups, in *Geometry and topology of submanifolds, III (Leeds, 1990)*, 73–80, World Sci. Publishing, River Edge, NJ.

[10] P. J. Olver and J. Pohjanpelto, *Moving Frames for Pseudo-Groups. I. The Maurer-Cartan Forms*, School of Mathematics, University of Minnesota, Minneapolis, MN 55455, October 13, 2003, 1–25.

Abstract. In this paper a formulation of a connection for tangent bundle of a unit sphere; $T(S^2)$ is presented. The connection is developed using properties of tangent bundle for S^2 and Lie differential operator. The connection is presented by a theorem and is found to be a flat Koszul connection. The connection is then generalized to any vector bundles (E, q, B) followed by several theorems which described its properties. Finally the extension of the developed connection turns to be a Maurer-Cartan form.